الأساليب الكمية للعلوم المالية والمصرفية

Quantitative Methods for Financial and Banking Sciences

الاستاذ المساعد الدكتور

سيف الدين هاشم قمر

استاذ الاحصاء والاساليب الكمية

قسم العلوم المالية والمصرفية، كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة العراقية- بغداد، العراق

المدرس الدكتور

قصي حميد السلامي

استاذ بحوث العمليات والاساليب الكمية

قسم إدارة الأعمال، جامعة جيهان- أربيل، اقليم كوردستان، العراق

الطبعة الثانية/ تشرين أول - ٢٠١٩

طبعة مُنقحة ومُعدلة

المحتويات

الموضوع	الصفحة
المقدمة	ز
الفصل الاول **الأساليب الكمية Quantitative Techniques**	
١-١ نبذة تاريخية عن الأساليب الكمية	١
١-٢ مفهوم الأساليب الكمية	٤
١-٣ أهمية الأساليب الكمية	٦
١-٤ أنواع الأساليب الكمية	٨
١-٤-١ بعض أساليب بحوث العمليات (البحث عن الأمثلية)	٨
١-٤-٢ بعض الأساليب الإحصائية	١١
١-٥ مراحل الأساليب الكمية في حل المشكلة واتخاذ القرار	١١
١-٦ دراسة وتحليل النظم	١٤
١-٦-١ هيكل النظم	١٥
١-٦-٢ البيئة المُحيطة	١٦
١-٧ بعض أنواع قيود النظم	١٧
١-٨ الأساليب الكمية في العلوم المالية والمصرفية	١٨
١-٩ دواعي استعمال الأساليب الكمية لاتخاذ القرار	٢٢
الفصل الثاني **نموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model (L.P.M.)**	
٢-١ مقدمة	٢٥

٢-٢ الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية	٢٦
٢-٣ البرمجة الخطية وبعض مجالات تطبيقها	٢٧
٢-٤ أمثلة لصياغة المشاكل باستعمال نماذج البرمجة الخطية	٢٨
٢-٥ الصيغة العامة لنماذج البرمجة الخطية	٤٣
٢-٥-١ الصيغة القانونية	٤٥
٢-٥-٢ الصيغة القياسية	٤٩
٢-٦ تحليل مسائل البرمجة الخطية	٥١
٢-٧ الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية	٥٤
٢-٨ الطريقة العامة لتحليل مسائل البرمجة الخطية	٧١
٢-٨-١ طريقة السمبلكس المبسطة	٧٢
٢-٨-٢ أسلوب M الكبيرة	٨٦
٢-٨-٣ طريقة السمبلكس ذات المرحلتين	٩٤
٢-٩ الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية	١٠٥
٢-٩-١ الحل المُفكك (المُتلاشي)	١٠٥
٢-٩-٢ الحل غير المُحدد	١٠٨
٢-٩-٣ تعدد الحلول المُثلى البديلة (أو الحلول المُثلى المُضاعفة)	١١٠
٢-٩-٤ عدم وجود حلول مقبولة للمسألة	١١٣
٢-٩-٥ المتغيرات غير المُحددة بإشارة	١١٥
٢-١٠ النموذج الثنائي والعلاقات بين النموذج الأولي – الثنائي	١١٥
٢-١١ مسائل محلولة	١٢٣

تمارين الفصل الثاني	١٧٣
الفصل الثالث **نماذج النقل (T.M.) Transportation Models**	
٣-١ مقدمة	١٨١
٣-٢ الصيغة العامة لنموذج النقل	١٨٢
٣-٣ إيجاد الحل الأساسي الأولي المقبول لنموذج النقل	١٨٧
٣-٤ طرق الحل الأولي	١٨٧
٣-٤-١ طريقة الركن الشمالي الغربي	١٩٠
٣-٤-٢ طريقة أقل الكلف	١٩٣
٣-٤-٣ طريقة فوجل التقريبية	١٩٩
٣-٥ طرق الحل الأمثل لنموذج النقل	٢١٠
٣-٥-١ طريقة المسار المتعرج	٢٢١
٣-٥-٢ طريقة التوزيع المُعدل	٢٢٩
٣-٦ الحالات الخاصة في مشاكل النقل	٢٥٥
٣-٦-١ مشكلة النقل غير المتوازنة	٢٥٥
٣-٦-٢ مشكلة تعظيم الإرباح	٢٦٢
٣-٦-٣ مشكلة التفكك	٢٧٣
٣-٦-٤ مشكلة محددات النقل	٢٧٤
٣-٦-٥ وجود أكثر من حل أمثل	٢٨١
٣-٧ مسائل محلولة	٢٨٣

تمارين الفصل الثالث	٣١١
الفصل الرابع **نماذج التخصيص (A.M.) Assignment Models**	
٤-١ مقدمة	٣٢٢
٤-٢ الصيغة العامة لنموذج التخصيص	٣٢٣
٤-٣ طرق الحل	٣٢٦
٤-٣-١ طريقة العد الكامل (السرد) أو التبديل	٣٢٦
٤-٣-٢ الطريقة الهنغارية	٣٢٨
٤-٣-٣ طريقة النقل	٣٤٧
٤-٣-٤ طريقة البرمجة الخطية	٣٥١
٤-٤ الحالات الخاصة في نماذج التخصيص	٣٥٢
٤-٤-١ مشكلة التخصيص غير المتوازنة	٣٥٣
٤-٤-٢ مشاكل تعظيم الإرباح	٣٦٠
٤-٤-٣ مشكلة التخصيص غير المقبولة	٣٦٦
٤-٥ مسائل محلولة	٣٧٤
تمارين الفصل الرابع	٤٠٠
الفصل الخامس **شبكات الأعمال Network Analysis**	
٥-١ مقدمة	٤٠٦
٥-٢ تكوين شبكة الأعمال	٤٠٧

٥-٢-١ تعاريف ومصطلحات أساسية	٤٠٨
٥-٢-٢ تقسيم الأنشطة من حيث التتابع الفني والترتيب المنطقي للمهام المختلفة	٤١١
٥-٢-٣ تقسيم الأنشطة من حيث الوقت والموارد المستنفدة في النشاط	٤١٢
٥-٢-٤ قواعد بناء شبكات الأعمال	٤١٤
٥-٣ أنواع نماذج شبكات الأعمال	٤٢٠
٥-٣-١ طريقة المسار الحرج (CPM)	٤٢١
٥-٣-٢ أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها (PERT)	٤٣١
٥-٤ جدولة أوقات المشروع	٤٤٠
٥-٥ تغيير وقت إتمام الأنشطة	٤٥١
٥-٦ مسائل محلولة	٤٥٧
تمارين الفصل الخامس	٤٧١
الفصل السادس **نظرية المباراة Game Theory**	
٦-١ مقدمة	٤٧٧
٦-٢ تصنيف المباراة	٤٨٢
٦-٢-١ حسب عدد اللاعبين	٤٨٢
٦-٢-٢ حسب عدد الاستراتيجيات	٤٨٣
٦-٢-٣ حسب نتيجة المباراة	٤٨٣
٦-٣ مباراة ذات المجموع الصفري لشخصين بنقطة	٤٨٤

٦–٤ مباراة ذات الاستراتيجية المختلطة	٤٩١
٦–٥ الاستراتيجيات المسيطرة (مبدأ السيطرة)	٤٩٣
٦–٦ مبدأ معدل الاستراتيجيات	٤٩٧
٦–٧ طرق حل مباراة ذات الاستراتيجيات المختلطة	٥٠٠
٦–٧–١ الطريقة الحسابية	٥٠٠
٦–٧–٢ الطريقة الجبرية	٥٠٦
٦–٧–٣ طريقة الرسم البياني	٥١٣
٦–٨ مسائل محلولة	٥٢٦
تمارين الفصل السادس	٥٥٣
المصادر	

مقدمة الطبعة الثانية

بسم الله الرحمن الرحيم والحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين سيدنا محمدٍ وعلى آله الطيبيين الطاهرين وصحابته الغُر الميامين، ويُعد فمن المعلوم إن تزويد الطالب بنظام تعليمي متخصص ضمن إطار من المعرفة التطبيقية الواسعة في مختلف العلوم سيساعد على فهم تلك المعرفة وترسيخها، وأن هذا النظام سيكون أكثر فاعلية عند توظيفه للأساليب الكمية، إذ سيعطي قاعدة تطبيقية واضحة لتوظيف تلك الاساليب في العلوم الأخرى مما يقود لتطويرها والذي يشكل الهدف الأساسي لإعداد هذا الكتاب، كما أُعد ليكون أساساً ومنهاجاً للطلبة المتخصصين بالعلوم الاقتصادية والمالية والمصرفية فضلاً عن اعتماده ككتاباً مساعداً لتخصصات الإدارة العامة وإدارة الأعمال والمحاسبة، إذ يعطي أساساً واسعاً في تلك العلوم باستعمال الاساليب الكمية المعتمدة على الإحصاء وبحوث العلميات، ويمكن ملاحظة ابتعاد الكتاب كلياً عن الاثباتات النظرية للصيغ والطرق المعتمدة واقتصاره على التطبيقات العملية الواقعية مُعززاً ذلك بكم واسع من الأمثلة والاسئلة المحلولة مع مجموعة متنوعة من التمارين التي مثلت خاتمة كل فصل من فصول الكتاب.

كما أن الكتاب سيُسهم بشكل مباشر في تطوير الطلبة في مجال الأساليب الكمية وكيفية توظيفها في معالجة الكثير من المسائل العالقة في الاقتصاد والمالية، ويُساعد أيضاً في استعمال تلك الاساليب كأداة فعالة في البحث العلمي للحصول على نتائج ذات طابع كمي مميز.

تناول هذا الكتاب في فصله الأول نبذة تاريخية عن الاساليب الكمية وأهميتها فضلاً عن أنواعها ومراحلها التي توظف في حل المشكلة واتخاذ القرار، ودرس هذا

الفصل تحليل النظم، كما تناول الأساليب الكمية في العلوم المالية والمصرفية ودواعي استعمالها لاتخاذ القرار، أما الفصل الثاني فقد تناول نماذج البرمجة الخطية وكيفية صياغتها وفق الصيغة القانونية والصيغة القياسية، كما تناول الطريقة البيانية والطريقة العامة لحل مسائل البرمجة الخطية، فضلاً عن ذلك فقد وضح هذا الفصل بعض الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية، وبخصوص الفصل الثالث فقد فصل الكلام فيه عن نماذج النقل وكيفية إيجاد الحل الأساسي الأولي المقبول لنموذج النقل والحل الأمثل، كما وضح الحالات الخاصة في مشاكل النقل، وفيما يتعلق بالفصل الرابع فقد تناول نماذج التخصيص وطرق حلها والحالات الخاصة فيها، وتناول الفصل الخامس تكوين شبكات الاعمال والتعاريف والمصطلحات الأساسية لها، كما تناول جدولة أوقات المشروع، أخيراً بخصوص الفصل السادس فقد فصل الكلام فيه عن طرق حل المباراة وفهم الظواهر التي يتنافس فيها صناع القرار لإتخاذ قرارات تتعلق باستراتيجيات منفردة أو مجتمعة ذات مصالح متضاربة للوصول إلى أفضل الخيارات الممكنة.

في الختام نتمنى أن نكون قد قدمنا ما يفيد الطبة والباحثين في مجال الاقتصاد والعلوم المالية وينمي قدراتهم البحثية بتوظيف تلك العلوم الكمية بطريقة فعالة، كما نرجو أن يغذي وينمي هذا الكتاب مدارك طلبة الدراسات الأولية مما يسهم في بنائهم وتنمية قدراتهم باتجاه توظيف تلك العلوم.

المؤلفان

الفصل الأول

الأساليب الكمية Quantitative Techniques

١-١ نبذة تأريخية عن الأساليب الكمية History of Quantitative Techniques

استخدمت الوسائل الرياضية في حل المشاكل منذ الآف السنين، لذا فإن تحديد البداية الحقيقية لما يُسمى اليوم بالأساليب الكمية ((Quantitative Techniques (QT) أو بحوث العمليات ((Operations Research (OR) صعب جداً، ومن تلك الأساليب ما استخدمه القائد المُسلم خالد بن الوليد باختراق صحراء بلاد الشام لمفاجأة الروم في أقصر وقت ممكن بدلاً من سلوكه الطريق المُعتاد حيثُ كان ينتظره الروم، من ناحية أخرى لا بد وأن استخدم الفراعنة قبله بحقبة طويلة أسلوب بيرت الشبكي لبناء الأهرامات. وفي الولايات المتحدة الأمريكية قام توماس أديسون (T. Edison) باستخدام أولي للأساليب الكمية وذلك بإيجاد الطرق الأكثر فعالية لمناورات السفن خلال الحرب العالمية الأولى، والتي من ساهمت في تقليل الخسائر لدى مُواجهة الغواصات المُعادية، ومع ذلك فقد جرى الأتفاق على أن أنطلاقة الأساليب الكمية أو بحوث العمليات المعاصرة أنما تُعزى إلى بعض الخدمات في الحرب العالمية الثانية، فقد كانت الحاجة مُلحة آنذاك لتوزيع الموارد القليلة والنادرة من عتاد وسلاح وذخيرة ومؤن على مُختلف الأنشطة العسكرية بطريقة تُعطي أفضل النتائج المُمكنة، وقد أظهرت الدراسات في ذلك الوقت إن التخطيط الجيد لاستخدام الأسلحة يُعطي نتائج أفضل من النتائج التي يعطيها التحسين والتطوير في هذهِ الأسلحة، وإن التوزيع المُناسب للموارد والمُهمات التي تتصف بأنها محدودة يعطي في كثير من الأحيان نتائج لا تقل أهمية عن النتائج

التي تعطيها الزيادة في هذهِ الموارد والمهمات، لكن الاستخدام الحقيقي والتطبيق الفعال لطرق التحليل الكمي هو من نتاج القرن العشرين، إذ بدأت ثورة الإدارة العلمية بقيام (F. Taylor) بوضع الأسس العلمية لاستخدام الطرق الكمية في الإدارة، ونتيجة لعملية التنمية الأقتصادية والأجتماعية للدول المتقدمة والنامية، فقد سعى متخذي القرار للحصول على معلومات أحصائية دقيقة تساعدهم في إتخاذ القرارات الدقيقة، وذلك من خلال تطوير مهارات المدراء في مختلف المستويات الأدارية وتزويدهم بمهارات الأساليب الكمية القابلة للقياس المدعمة للحقائق، مستفيدين من مزايا النماذج الإحصائية والرياضية في التحليل الكمي دون الانحياز لشخص للتوصل إلى القرار الأمثل[1].

لقد عمدت الإدارة العسكرية الأمريكية على أعداد فرق بحوث العمليات مُماثلة للفرق البريطانية التي أحرزت نجاحاً عسكرياً كبيراً، وذلك للاستفادة منها في مُعالجة مُشكلات الطيران والبحرية وإيجاد خطط مُثلى لتوزيع المعدات والمواد على مختلف الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق مختلفة من العالم، ونجحت جهود هذهِ الفرق كذلك في إيجاد خطط مثلى لزرع الألغام وتحديد المسارات المثلى للغواصات والقطع البحرية لتجنب ضربها من قبل العدو، وقد قامت كل من السلطات الكندية والفرنسية خلال الحرب العالمية الثانية بسلوك نفس الطريق الذي سلكته القوات البريطانية والأمريكية في استخدامها لطرق بحوث العمليات، وبعد أنتهاء الحرب تشجع رجال الأعمال على إدخال علم بحوث العمليات في إدارة مشاريعهم الأقتصادية لحل بعض

---

(١) طيار، أحسن، (٢٠١٢)، "واقع استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية: دراسة ميدانية بقطب المحروقات في ولاية سكيكدة بالجزائر"، المجلة الأردنية في إدارة الأعمال، المجلد ٨، العدد ١، ص ص ١٤٨-١٦٧.

المشاكل الأقتصادية المعقدة التي تتطلب الكثير من الدقة في إجراء حساباتها المالية خاصة[1].

إن التطور التأريخي لاستخدام أساليب المنهج الكمي قد تم أشتقاقهُ من أساليب علم الرياضيات، فعلم الرياضيات قد استخدم في مختلف العلوم، وبشكل قليل في مجال علم أدارة الأعمال، وفي فترة الثورة الصناعية التي بدأت في أنكلترا في منتصف القرن الثامن عشر، فقد تم إحلال الآله محل القوة البشرية بعد أن تم استخدام المحرك البخاري سنة 1864[2].

والخلاصة فإن الأساليب الكمية تدخل اليوم في إيجاد الحلول الفعالة لكثير من المشكلات منها:

- شركات صناعة الطائرات، والصواريخ، والسيارات، والأطعمة والأدوية، والورق، والبترول وغيرها من الصناعات المختلفة.
- شركات الاتصالات السلكية واللاسلكية، النقل (الخطوط الجوية والبحرية والبرية)، الشركات والمؤسسات المالية والحكومية والمستشفيات.
- التخطيط بشتى أنواعه، وغيرها الكثير.

ولا بد من الإشارة إلى عاملين مهمين أسهما في سرعة تطور بحوث العمليات:

---

(١) الصفدي، محمد سالم، (١٩٩٩)، "بحوث العمليات – تطبيق وخوارزميات"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان–الأردن، ص ١٠.

(٢) البلخي، زيد تميم، (١٩٩٨)، "مقدمة في بحوث العمليات"، جامعة الأمام محمد بن سعود الأسلامية، ص ١٩.

١. التقدم التكنولوجي الكبير الذي بدء وأخذ بالتسارع منذ الخمسينات من القرن السابق.
٢. التقدم السريع في مجال الحاسبات، فمُعظم المسائل التي تتناولها الأساليب الكمية بالبحث والدراسة والحل تتطلب قدراً كبيراً من الحسابات يصعب إجراءها بالطرق اليدوية، ولهذا فالتقدم الذي ظهر في مجال الحاسوب كان لهُ الفضل الكبير في تطوير وإثراء الأساليب الكمية.

١-٢ مفهوم الأساليب الكمية Concept of Quantitative Techniques

هي مجموعة من الأدوات (Tools) والطرق (Methods) التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري (أو الاقتصادي أو غيرها) المزمع اتخاذه بخصوص حالة معينة، ويُفترض في هذه الحالة توافر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة، كما يتطلب تطبيقها واستخدامها تحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر[١].

وقد عرفها البعض بأنها تلك النماذج الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها.

---

(١) الفضل، مؤيد عبد الحسين، (٢٠١٠)، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، ص ٢٢.

ويتم تدعيم النماذج الرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الآخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة.

تتصف هذه الأساليب بأن بعضها ذات طابع أو صفة احتمالية والبعض الآخر يتصف في كونه ثابت أو ساكن والبعض الآخر يتصف في كونه متغير بشكل مستمر حسب طبيعة العامل الزمني، والتعاريف الآتية توضح لنا مفهوم ومعنى الأساليب الكمية أو بحوث العمليات[1] [2]:

- تعريف الأساليب الكمية من قبل جمعية بحوث العمليات البريطانية:

"استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات والمواد الأولية والقوى العاملة والأموال والأمور الخدمية الأخرى في المؤسسات والمصانع المدنية والعسكرية".

- تعريف الأساليب الكمية من قبل جمعية بحوث العمليات الأمريكية:

"تتعلق الأساليب الكمية باتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة المعدات والقوى العاملة وفق شروط معينة تتطلب تخصيص الموارد النادرة بشكل أمثل".

- الأساليب الكمية هي مجموعة من الطرق المستخدمة في إعداد المعلومات بشكل يعطي الإدارة الفرصة لاتخاذ القرارات المناسبة في الوقت المناسب.

---

(1) Tommi Sottinen, (2009), "Operations Research: with GNU Linear Programming Kit", Web Notes, http://www.uwasa.fi/~tsottine/orms1020, p. 6.

(2) Dalal S. Al-Jawad, (2013), "Operations Research", Cihan University Publications, Erbil – IRAQ, p. 3.

- إن هذا العلم عبارة عن مجموعة من الطرق والأساليب (خوارزميات) الرياضية أو الإحصائية أو البيانية التي تسمح لصانع القرار باستخدام الحاسوب في حل المسائل التنظيمية بشكلها الأمثل.
- الأساليب الكمية هي استخدام الأساليب والطرق العلمية لتنظيم تعاون العمليات والأنشطة ضمن نظام (System) ما بُغية إيجاد حل أمثل أو حلول مثلى لمشكلات هذا النظام من بين جملة من الحلول الممكنة.

وانطلاقاً من التعاريف السابقة نجد إن تجسيد المُشكلة المراد حلها إدارياً يجب أن يعبر عنها بعلاقات رياضية أو إحصائية أو شبكية أو بيانية ندعو هذهِ العملية بعملية المحاكاة (Simulation)، وندعو مجموعة العلاقات الرياضية التي تعبر بشكل كامل عن المُشكلة المراد حلها واتخاذ القرار بها بالنموذج الرياضي.

إن الأساليب الكمية تقدم نموذجاً لمعالجة مشكلة ما يُمكن بموجبه القياس والمقارنة والتنبؤ لتقييم بدائل متاحة لمُتخذ القرار يتم على أساسها اختيار أفضل البدائل لتحقيق أفضل الحلول للمشكلة، لذلك فالأساليب الكمية تساعد مُتخذ القرار على اتخاذ قراراتهِ السليمة.

١-٣ أهمية الأساليب الكمية Importance of Quantitative Techniques

ظهرت الحاجة الملحة لاستخدام اساليب التحليل الكمي في الأقسام المالية والمصرفية نتيجة لضخامة حجم المشاريع والمؤسسات الحديثة، حيث أصبحت المشكلات الادارية فيها على درجة عالية من التعقيد وأصبحت الاساليب التقليدية التي تعتمد على الخبرة الذاتية لمتخذ القرار والتجربة والخطأ غير فعالة، ومن ناحية أخرى

فإن نتائج القرارات إن لم تكن محسوبة ومقدرة تقديراً صحيحاً قد يترتب عليها أضرار وخسائر لا يمكن تعويضها، وتستخدم تعبيرات أخرى للإشارة الى التحليل الكمي في الأقسام المالية والمصرفية مثل: بحوث العمليات، علم القرار، الأساليب الكمية وغيرها من المسميات، وهي تهدف بصفة عامة إلى تطبيق الطريقة العلمية بالاستعانة بالطرق الكمية لحل مشاكل اتخاذ القرارات في مجالات الإدارة والإقتصاد.

وتهدف الأساليب الكمية إلى البعد عن تجريد المشكلة المراد اتخاذ القرار بشأنها من العوامل الثانوية المتعلقة بها والتركيز على المشكلة بصفة أساسية، ووضعها في نموذج كمي، أو صيغ كمية، حتى تبتعد بها عن التفاوت بين وجهات النظر أو الاجتهادات الشخصية، وتستخدم الأساليب الكمية لتحديد الأهداف والبدائل المتاحة وتزويد صانع القرار بها وبكل العوامل المتعلقة بالقرار بصرف النظر عن كونها عوامل سلبية أم إيجابية.

ومن الخصائص المميزة للأساليب الكمية أو بحوث العمليات إنها تعتمد على منهج متكامل لتحليل المشكلات ودراستها وذلك بالتعرف على الجوانب المختلفة التي تحكم المشكلة المدروسة والأهداف المراد تحقيقها والبدائل التي تؤدي الى الوصول إلى هذه الاهداف وذلك باستخدام الطرق الكمية الملائمة.

ويتم اتخاذ القرار المناسب في ضوء نتائج التحليل الكمي من ناحية وبناءاً على التقدير الشخصي لمتخذ القرار من ناحية أخرى، وذلك إن الحكم الشخصي لمتخذ القرار يأخذ في الاعتبار أيضا العوامل التي لم تتم صياغتها صياغة كمية.

وتتطلب دراسة بحوث العمليات وتطبيقها في المجال المالي والمصرفي خلفية في العلوم المرتبطة بطبيعة المشكلة محل الدراسة مثل العلوم المالية والمصرفية

والاقتصادية، وكذلك خلفية في الطرق الكمية التي يمكن استخدامها في الاحصاء والرياضيات[1].

١-٤ أنواع الأساليب الكمية Quantitative Techniques Types

هنالك الكثير من النماذج والأساليب والنظريات المختلفة التي تم تطويرها وتطبيقها لحل الكثير من المشكلات المتعلقة بالواقع منها:

١-٤-١ بعض أساليب بحوث العمليات (البحث عن الأمثلية)

Some of Operations Research Techniques (Search of Optimality)

١. نماذج التحصيص Allocation Models: نظراً لقلة الموارد المتوفرة لنظام ما وندرتها أحياناً فأننا نحتاج توزيع هذه الموارد على الأنشطة المختلفة في هذا النظام بطريقة تعطينا أفضل النتائج.

٢. نماذج التخصيص Assignment Models: وتبحث هذه النماذج في كيفية توزيع عدد معين من الموارد (أشخاص، أجهزة، شركات، ...) على عدد من الأعمال بطريقة تجعل المنفعة العائدة من هذا التوزيع أفضل ما يمكن.

٣. نماذج النقل Transportation Models: وتبحث هذه النماذج في إيجاد طريقة لنقل الموارد (كمنتجات المصانع والمزارع والطاقة الكهربائية والمائية وغيرها) إلى غايات معينة (كالمخازن أو مراكز التوزيع والتسويق) بطريقة تلبي احتياج هذه الغايات من تلك الموارد بأقل تكلفة ممكنة.

---

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, (2001), "Operations Research", Seventh Edition, McGraw-Hill Companies, USA, p. 3.

٤. نماذج الشبكات Networks Models: يُمكن وضع كثير من المسائل التي تتضمن الكثير من الأنشطة المُتداخلة والمُعقدة أحياناً على شكل شبكة تظهر فيها هذهِ الأنشطة والحوادث التي تنتج عنها، مثلاً تخطيط المشاريع الكبيرة (سدود، جسور، مصانع،...) وشبكات النقل (خطوط الاتصالات السلكية واللاسلكية، الخطوط الجوية أو البرية أو البحرية) والتي تربط المدن والدول وما شابة ذلك، ولقد تطورت هذهِ النماذج حيث أصبح من المُمكن تخطيط ومراقبة وضبط الموارد والأنشطة في أي مسألة بطريقة تُوصل إلى الأهداف بطريقة فعالة.

٥. نماذج التخزين Inventory Models: تُعتبر مُشكلة تحديد مستوى ملائم من المخزون من المشكلات المهمة التي تواجهها الأنظمة بشكل عام ذلك أن الزيادة أو النقص في مستوى مخزون نظام قد يعرض هذا النظام لمصاعب كثيرة.

٦. نماذج صفوف الانتظار Queuing Models: من أمثلة ذلك صفوف الطلبة في الطوابير لإجراء عملية التسجيل، صفوف المرضى بانتظار العلاج في المستشفيات والعيادات، وصفوف الأجهزة المعطوبة بانتظار إصلاحها ...إلخ.

٧. أساليب المُحاكاة Simulation Techniques: تواجه الأنظمة أحياناً مُشكلات مُعقدة يصعب إيجاد نموذج (رياضي) بسيط لحلها كما سبق، وإن إجراء التجارب على النظام نفسهِ يكون في مُعظم الأحيان صعباً وباهظ التكاليف ويحتوي على شيء من المخاطرة، ونقوم في مثل هذهِ الحالات بمُحاكاة المُشكلة المطروحة بعمل صورة تماثل الواقع الفعلي لهذهِ المشكلة دون المساس بالنظام نفسهِ.

٨. نماذج المنافسة Competition Models أو نظرية المباراة Game Theory: تقوم هذه النماذج بمعالجة مشكلات تتضمن التنافس بين نظامين أو أكثر (شركات، أشخاص، ...) هدفه تكبير المنفعة لبعضها دون الأخرى.

٩. النماذج الديناميكية Dynamic Models: وتستخدم هذه النماذج لمُعالجة مُشكلات ذات مراحل زمنية متتابعة ومترابطة، وتهتم بمعالجة مشكلات لا يدخل فيها عنصر الزمن حيثُ يتم حل المشكلة وفق خطوات كما لو أنها مراحل زمنية متتابعة ومترابطة ، وتعتمد على مبدأ يسمى مبدأ الأمثلية والذي ينص على أن الوصول إلى الحل الأمثل يتم عن طريق إيجاد سلسلة من الحلول المثلى المتتابعة لمراحل المشكلة المترابطة ومن ثم استخدام هذا الترابط لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة ككل.

١٠. نماذج التعادل Breakeven Models: من الطبيعي جداً أن يتوقع أصحاب المنشآت بأن مجموع فوائد المنشأة سيتجاوز مجموع التكاليف بمرور الزمن، وتسمى المرحلة الزمنية من العمل التي يتساوى فيها مجموع العوائد ومجموع التكاليف بمرحلة أو نقطة التعادل، فعندما يكون مستوى العمل في المنشأة أعلى منه عند نقطة التعادل فأن مكاسب المنشأة تكون في طور النمو وإلا فأنها في طور التراجع، ونماذج التعادل تعتمد على أسلوب بسيط من أساليب التحليل الكمي التي تمكن القائمين على إدارة منشأة من إيجاد أو حساب نقطة التعادل، وتستخدم هذه النماذج أيضاً في تخطيط الإنتاج وفي سياسات وقف الشراء.

١١. النماذج المسلكية Behavioral Models: وتهتم هذه النماذج بإجراء ثلاثة أنواع من التحليل، الأول حول سلوك الفرد والثاني حول سلوك الجماعة ويتناول الثالث سلوك التنظيم ككل، وقد ظهرت الحاجة لإدراج هذه النماذج في بحوث

العمليات وذلك لأننا نجد مثلا أن هناك علاقة قوية بين قناعات ومشجعات العاملين في منشأة وبين مردود تلك المنشأة كما أنه لا يمكننا إهمال سلوك المستهلكين لسلعة ما عند التخطيط لإنتاج تلك السلعة.

وهنالك العديد من النماذج الأخرى منها نظرية القرارات والطرق الاستكشافية وضم الطرق وابتكارها في بحوث العمليات[1].

١-٤-٢ بعض الأساليب الإحصائية Some of Statistical Methods

١. أسلوب الارتباط Correlation Method.

٢. أسلوب الانحدار Regression Method.

٣. نماذج التوقع Expectation models.

٤. الاختبارات الإحصائية Statistical tests.

١-٥ مراحل الأساليب الكمية في حل المشكلة واتخاذ القرار

Phases of quantitative Techniques to solve the problem and decision-making

إن مختصي الأساليب الكمية وبحوث العمليات ومحللي النظم ومهندسيها والمهندسين الصناعيين وفريق من هؤلاء هم أناس مؤهلون للمساهمة في دراسة النظم، وأياً كان القائمون بإجراء مثل هذه الدراسة فإن هناك منهجاً مُشتركاً لدراسة وحل مشكلات النظم يُمكن تلخيصها بالخطوات الآتية[2] [1]:

---

(١) البلخي، زيد تميم، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٠.

(2) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 7.

١.تعريف المُشكلة قيد الدراسة Definition of the Problem:

يتم ذلك بتحديد كل من الهدف والبدائل والقيود، بالنسبة للهدف قد يتمثل في زيادة الإرباح أو زيادة الطاقة الإنتاجية أو تقليل التكاليف، أما البدائل فهي تحديد طرق العمل المُختلفة والتي تُستخدم في التقييم، أما القيود فهي مجموعة من المُحددات كالأموال والأيدي العاملة والمعدات والوقت والمواد الأولية والتي تحكم المشكلة، وإن الحل المقبول للمشكلة يجب أن يتماشى مع القيود التي فرضتها مجموعة الموارد المتاحة.

٢.تصنيف المشكلة Problem Classification:

وتتضمن تحديد المشكلة بشكل دقيق ومحاولة تصنيفها ضمن أحدى المشكلات المعروفة (مشكلة تخزين، صفوف انتظار، ...) وهذهِ العملية تشبه عملية تشخيص المرض من قبل الطبيب قبل وصف العلاج لذلك المرض (النموذج بالنسبة للمشكلة).

٣.صياغة النموذج الملائم للمشكلة Constriction of the Model:

إن عملية صياغة النموذج هي عملية تمثيل المكونات (المشكلة والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة بها بشكل أو بصيغة تساعد على فهمها) وكلمة النموذج تعني عرض مبسط للواقع بصيغة تساعدنا من التوصل إلى قرار سليم، من هذهِ النماذج الرياضية والفيزيائية والتنظيمية.

---

(١) البلخي، زيد تميم، مصدر سبق ذكره، ص ١٧.

٤. حل النموذج Model Solving:

بعد الصياغة تأتي مرحلة حل النموذج لاستخراج مجموعة قيم المتغيرات التي تعطي حلاً مُمكناً للمشكلة قيد الدراسة ومن ثم إيجاد الحل (حلول) مثلى من بينها بواسطة أساليب البرمجة الرياضية أو البرامج الاحتمالية أو شبكات الأعمال وغيرها.

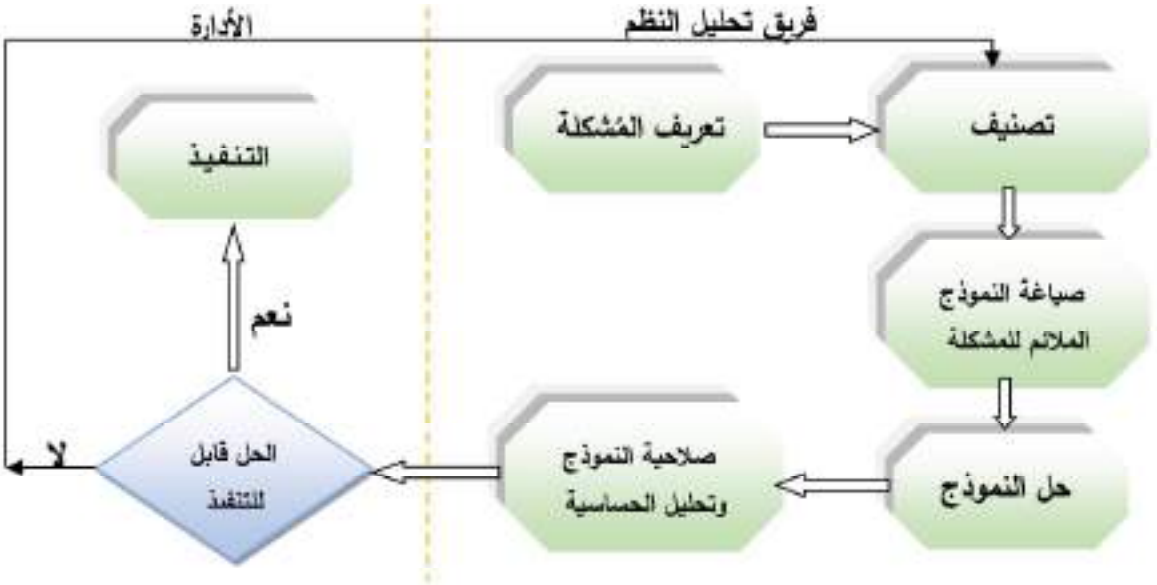
٥. صلاحية النموذج وتحليل الحساسية Model Validation & Sensitive Analysis:

بعد حل النموذج يجب اختباره لإظهار قدرة النموذج في تمثيلهُ للمسألة وذلك باستخدام بيانات تاريخية، ويساعدنا في ذلك إجراء تحليل الحساسية الذي يهدف إلى معرفة تأثير التغيرات التي نجريها في مُتغيرات القرار على الحل أو الحلول المثلى المقترحة.

٦. التنفيذ Implementation:

يُعرف التنفيذ بأنه وضع الحلول المقترحة موضع التطبيق، فبعد التأكد من صلاحية النموذج وملائمتهُ للبيانات يتم ترجمة الحل وتحويلهُ إلى أساليب عمل ومراقبته وتقديمها إلى الجهات المختصة بشكل واضح.

ويُمكن تلخيص مراحل دراسة النظم في شكل (١-١) الآتي:



شكل (١-١) يوضح مراحل دراسة النظم

١-٦ دراسة وتحليل النظم Studying and Analyzing Systems

لقد تطور مفهوم الأساليب الكمية وتطبيقاتها سريعاً بعد الثورة التكنولوجية التي أعقبت الحرب العالمية الثانية فاتسعت هذهِ المفاهيم وتعقدت لتصبح أكثر انسجاما مع المناهج العلمية المتطورة، ومع المُشكلات التي ازدادت تعقيداً[١].

يُمكن تعريف النظام على أنهُ مجموعة من العناصر (بشر، موارد، مفاهيم، إجراءات، أجهزة، أبنية...) تؤلف فعاليات معينة أو تنفذ مخططاً من أجل الوصول إلى أهداف معينة وذلك بإجراء عمليات على بيانات و/أو طاقة و/أو مواد ضمن وقت الاحتياج لتنتج معلومات و/أو طاقة و/أو منتجات و/أو حلاً لمشكلة بُغية تحقيق تلك الأهداف.

---

(١) الصفدي، محمد سالم، مصدر سبق ذكره، ص ١٥.

وفيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية لبعض الأنظمة المعروفة:

- النظام الصناعي: هو مجموعة من البشر والآلات والتسهيلات (العناصر) التي تعمل معاً لإنتاج عدد ونوع مُعين من المنتجات (الفعاليات)، وذلك بإجراء عمليات على المواد الخام من خلال تطبيق القوى الكهربائية أو البترولية أو غيرها (العمليات) بُغية استخراج منتجات ضمن الوقت الذي يحتاجهُ أو يرغبهُ المستفيدون منها (تحقيق الأهداف).
- نظام تنظيم الأعمال: هو مجموعة من الأجهزة والأشخاص ووسائل الاتصالات (العناصر) يقومون بجمع المعلومات ومعالجتها للوصول إلى أهداف متعددة تتضمن مصلحة العمل (الفعاليات)، وذلك بالقيام بإجراءات مالية وبالتخطيط للإنتاج والتسويق وإعادة تنظيم العمل (العمليات) بحيث تصل إلى منتجات جاهزة للبيع و/أو مبيعات محددة و/أو طاقة إنتاجية أفضل (تحقيق الأهداف).

١-٦-١ هيكل النظم Systems Structure

هناك هيكل عام للنظم يتميز بالأقسام الآتية:

- **المُدخلات Inputs:** وتشمل العناصر التي تدخل النظام كالمواد الخام التي تدخل المصانع والطعام الذي يدخل جسم الإنسان والطلاب الذين يدخلون الجامعة ... الخ.
- **العمليات Processes:** وتشمل الإجراءات التي من شأنها أن تحول المُدخلات إلى مُخرجات، فمثلاً العمليات في مصنع تشمل استخدام الطاقة – معالجة المواد – إستخدام الأجهزة والأيدي العاملة ...الخ.

- **المُخرجات Outputs:** وتتمثل بالنواتج النهائية التي تنتج عن إجراء العمليات على المُدخلات كالمنتجات التي تخرج من المصانع وكالطلبة والبحوث العلمية التي تُخرجها الجامعات ...الخ.

١-٦-٢ البيئة المُحيطة Surrounding Environment

يُحاط النظام عادةً بما نسميه البيئة (Environment) وتتمثل بعدد من العناصر التي تقع خارج النظام وهي ليست من مكونات النظام، ولكنها مع ذلك ذات تأثير مباشر على النظام وبالتالي على تحقيق أهدافهُ، وكمثال على ذلك:

- **المجتمع** (مثال: يراعى في أنتاج البضائع لمجتمع معين أذواق الناس وعاداتهم وتقاليدهم في هذا المجتمع).

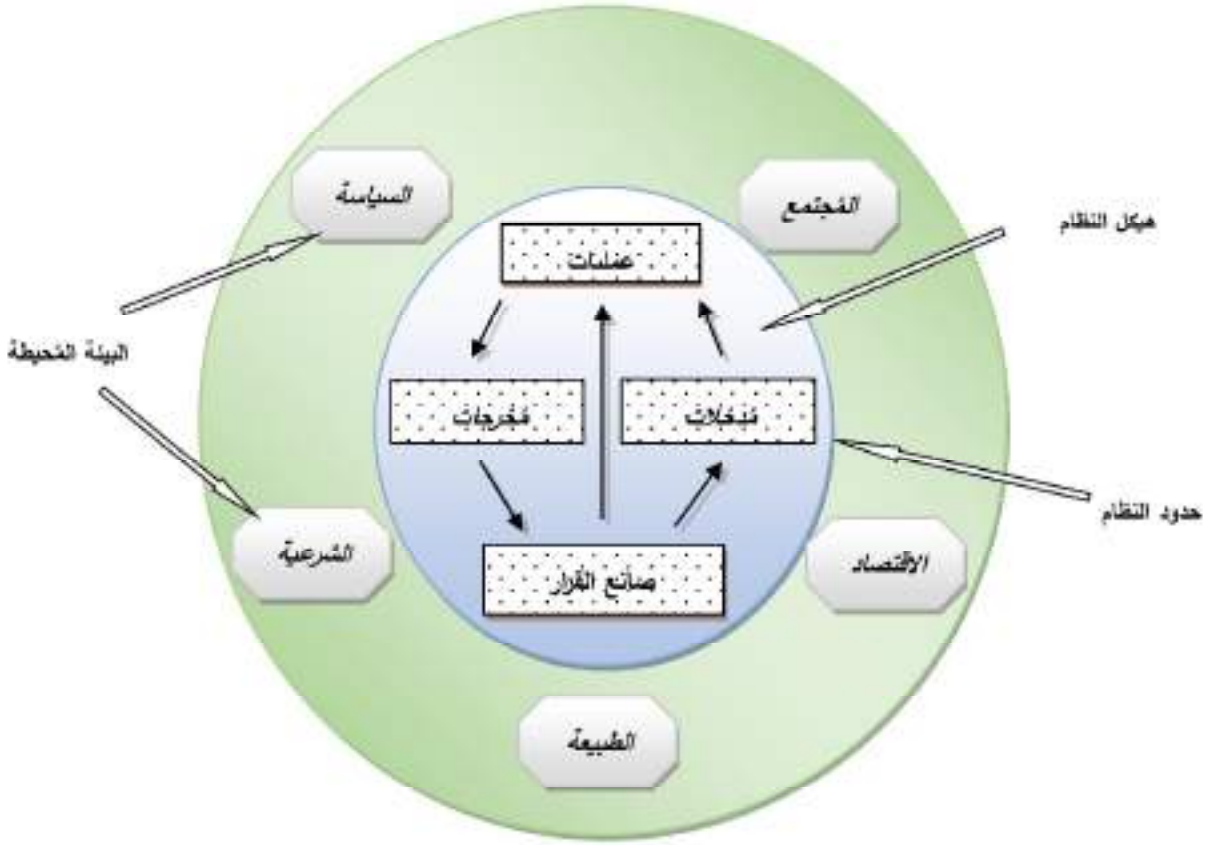
- **السياسة** (مثال: لا بد لأي نظام من مراعاة السياسة العامة للبلد في عمليات الإنتاج والتسويق وغيرها).

- **الشرعية** (مثال: أن تراعي الأنظمة للقوانين السائدة في البلد).

- **الطبيعة** (مثال: الطقس والعوائق الطبيعية).

- **الاقتصاد** (مثال: لا بد لأي نظام أن يراعي المصلحة العامة لاقتصاد البلد مثلما يراعي مصلحتهُ الخاصة).

وشكل (٢-١) التالي يوضح طريقة أداء النظام وعلاقته بالبيئة المحيطة.



شكل (٢-١) يوضح طريقة أداء النظام وعلاقتهِ بالبيئة المُحيطة

١-٧ بعض أنواع قيود النظم Some Types of Systems Constraints

تخلق البيئة المُحيطة بنظام نوعاً من القيود يجعل بعض الحلول لمُشكلة ما يواجهها النظام غير مُمكنة، كما إن مثل هذهِ القيود قد تتولد من النظام نفسهِ، ومنها:

١. القيود التكنولوجية Technological Constraints: كوجود بعض طرق الحل الغير معروفة أو المُتقدمة أو كوجود بعض البيانات أو النماذج التي تتطب المُعالجة والحل بأجهزة غير متوفرة.

٢. القيود الفيزيائية Physical Constraints: وهي التي تناقض قوانين الفيزياء وقد تصبح هذه القيود قيوداً تكنولوجية كاختراق سرعة الصوت المحظور على الطيران المدني فوق المناطق المزدحمة بالسكان.

٣. القيود الاقتصادية Economic Constraints: كالقيود التي تنشأ عن الموارد المحدودة كمحدودية المال والوقت والكوادر والمواد الخام ...ألخ.

٤. القيود السياسية Political Constraints: وهي القيود التي تقود إلى حلول قد تؤدي إلى مخالفة سياسة البلد كالأضرار بالأمن القومي أو الأمن الغذائي أو بالاقتصاد العام مما ينتج عنه ضرورة استبعاد مثل هذه الحلول.

٥. القيود الأخلاقية Moral Constraints: كالقيود الدينية، مثال ذلك استيراد ملابس لا تُليق بالذوق العام في بلادنا المُسلمة.

٦. القيود الاجتماعية Social Constraints: كالعادات والتقاليد وغيرها.

١-٨ الأساليب الكمية في العلوم المالية والمصرفية

Quantitative Techniques in Banking & Financial Sciences

تعتمد الشركات الحديثة استخدام الأساليب الكمية لترشيد قراراتها وحمايتها من احتمال الخسارة المالية المرتبطة بالضرائب فضلاً عن تحسين وضعها التنافسي وضمان الاستمرار في سوق العمل من خلال اعتماد الدراسات المالية واتخاذ إجراءات

عملية في حساب الكلفة، وبهذا تكمن أهمية القرارات المالية المبنية على استخدام الأساليب الكمية في المحافظة على استمرارية نمو المنشأة وتزايد حصتها السوقية[1].

فقد زاد الاهتمام بعد الحرب العالمية الثانية بتطوير وسائل تحليل التكاليف لخدمة أهداف التخطيط والرقابة واتخاذ القرارات، إذ استُخدم تحليل التعادل ثم الأساليب الرياضية والإحصائية بشكل واسع ليرتفع مستوى الدقة في معلومات محاسبة التكاليف، ومع بداية الستينيات زاد الاهتمام بمحاسبة التكاليف المعيارية باعتبارها الأساس العلمي لأعداد الموازنات التخطيطية، فأصبح النظام المحاسبي لا يهتم بالأحداث الفعلية فقط وإنما يمتد اهتمامه للتنبؤ بالمستقبل ومحاولة التوقع لما سيكون عليه لمساعدة الإدارة في وضع الخطط المناسبة، واقترح كلارك استخدام طرق إحصائية لتقدير سلوك التكاليف في ظل أسلوب السلاسل الزمنية، ولمعالجة مشكلة توزيع التكاليف استخدم أسلوب تحليل المدخلات والمخرجات من خلال الاستفادة من جبر المصفوفات[2].

لقد اتجهت أساليب المحاسبة الإدارية إلى استخدام نظرية الاحتمالات ونظرية القرار الإحصائي وأسلوب التباين وأسلوب قيمة المعلومات المثالية كأساس لاتخاذ قرارات الموازنة الرأسمالية، وذلك لمعالجة جوانب القصور في قرارات الموازنة الرأسمالية الخاصة بإهمال ظروف عدم التأكد والمخاطرة [3].

---

(١) راضي، سهيلة جمعه، هاشم، صفاء محمد، (٢٠٠٩)، "الأساليب الكمية في حساب تأثير تكاليف التشغيل والصيانة على قرار الاستبدال"، مجلة التقني – المجلد الثاني والعشرون، العدد ٥، ص ص ١-١١.

(2) Kaplan, R. S., (July 1984), "The Evaluation of Management Accounting", the Accounting Review, p. 396.

(3) Scapens, R. W., (May 1982), "Management Accounting – A survey Paper", Published paper commissioned by SSRC, p. 29.

أن الاحتياجات المتلاحقة لتطبيق النماذج الكمية على مشاكل متنوعة في التخطيط والرقابة من بعد منتصف القرن العشرين حفز على التطور الحاصل في أساليب بحوث العمليات، والذي قدم أدوات تحليلية لدعم القرارات الخاصة بتحديد المزيج الإنتاجي الأمثل، وقرارات التصنيع أو الشراء[1].

لقد استعانت المحاسبة الإدارية بنظم ونظريات اقتصادية وأدارية أبرزها نظرية الوكالة والنظرية الموقفية ومدخل اقتصاد المعلومات، نتيجة لتطور بيئة الأعمال والنماذج التي على أساسها يتم اتخاذ القرارات الاقتصادية، حيثُ أن هذا المدخل يعد امتداداً لنظرية القرارات الإحصائية التي من أهدافها محاولة تحسين الاحتمالات القبلية عن طريق معلومات إضافية، يتم تحويلها إلى احتمالات بعدية[2].

تنظر نظرية الوكالة إلى المعلومات المحاسبية كأساس للتعاقد بين وكلاء اقتصاديون ممن لديهم حقوق ملكية مختلفة، ومعلومات ومعتقدات مختلفة وكذلك تفضيلات مختلفة[3].

وتعتمد النظرية الموقفية على منطق رئيسي هو عدم وجود طريق واحد جيد لإدارة المنظمات يمكن إتباعه في كل وقت[4]، وعند تطبيق ذلك على المحاسبة فأنه لا توجد هناك أنظمة محاسبية مناسبة يمكن أن تطبق بشكل متساو على كل المنظمات

---

(1) Kaplan, R. S., **Op. Cit.**, p. 404.

(2) Sorter, George, H. & Martins, G., (1974). 'Opportunities and Implications of Report on the Objective of Financial Statements', Studies on financial Accounting, Journal of Accounting Research, p. 1.

(3) **Ibid**, p. 1104.

(4) Hayes, David C., (January 1977), 'The Contingency Theory of Managerial Accounting', The Accounting Review, p. 22.

وفي كل الظروف، وبدلاً من ذلك فان خصائص النظام المحاسبي تعتمد على ظروف معينة وعند اتخاذ القرار ينبغي دراسة وتحليل الموقف (البيئة) المؤثرة في فاعلية المنظمة، وهذا يعتمد على إدراك متخذ القرار للعوامل البيئية[1].

ونتيجة للتطورات المهمة في مجال الإدارة لم يعد هنالك هدف واحد تسعى المنظمة الى تحقيقة بل أهداف متعددة، وعلية فمن الضروري لأي مشكلة قرار هو تحقيق التوازن بين الأهداف المتعددة والتي يكون بعضها متوافقا والبعض الآخر متعارضاً، وأصبح استخدام الأساليب الكمية عاملاً حيوياً في حل مشاكل القرار المعقدة، حيثُ أنها تستخدم عملياً في تقييم ومقارنة البدائل المتاحة والقابلة للتنفيذ أمام متخذي القرار لبيان أفضل البدائل التي تحدد هدفه المحدد مسبقاً.

إن أساليب المنهج الكمي لإدارة الأعمال تُركز على بحوث العمليات أكثر من الأساليب الكمية الأخرى، وهذا ما ذهب إليه بعض المتخصصين بالعلوم الإدارية معللين ذلك بأن بحوث العمليات تعتمد على الأمثلية في الحصول على النتائج والحلول، كما أنها تهتم بمعالجة المشكلات التي تتصف بمحدودية الموارد وتعدد البدائل، إضافةً إلى أنها تدخل في معالجة مشكلات كثيرة لمنظمات الأعمال ضمن الواقع العملي.

وللأساليب الكمية دور في ترشيد القرارات والبحث عن حالة العقلانية لأي تصرف أو سلوك إنساني في أي من مجالات الحياة المختلفة لتحقيق الاستخدام الأمثل

---

(1) Otley, David T., (1980), 'The Contingency Theory of Management Accounting: Achievement and Prognosis', Accounting Organization and Society, Vol. (5), No.4, p.1.

والصحيح للإمكانيات المتاحة، مع اعتماد منهج علمي واضح قائم على أساس الأستعانة بتطبيق الأساليب الكمية في اتخاذ القرار وذلك من خلال[1]:

أولاً: المساهمة المباشرة في عملية حل المشاكل التي تواجه منظمات الأعمال كاستخدام المخططات الشبكية (CPM & PERT) أو نماذج الخزين وذلك لأغراض التخطيط والرقابة.

ثانياً: المساهمة غير المباشرة في عملية حل المشاكل التي تواجه منظمات الأعمال على أساس إيجاد حالة مناسبة أو مثالية لأجل المقارنة مع ما هو موجود في الواقع العملي.

١-٩ دواعي استعمال الأساليب الكمية لاتخاذ القرار

Reasons the Use of Quantitative Techniques for Decision-Making

هناك عدة أسباب تجعل المنهج الكمي يستخدم في عملية اتخاذ القرارات[2] [3]:

١. أن المشكلة معقدة بمعنى وجود عدد كبير من المتغيرات المتشابكة والتي تؤثر فيها ومن ثم لا يستطيع المدير أن يجد لها حلاً بسيطاً وسهلاً.

٢. قد تكون المشكلة هامة للغاية بمعنى أنها قد تتطلب أصولاً كبيرة وقد تؤثر في حياة المؤسسة ولذا فإن المدير يرغب بالقيام بتحليل شامل ودقيق لها قبل أن يتخذ أي قرار بشأنها.

---

(١) عياش، جابر محمد، (٢٠٠٨)، "واقع استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرار وحل المشكلات لدى المؤسسات الأهلية بقطاع غزة"، رسالة ماجستير، الجامعة الأسلامية – غزة، كلية التجارة – قسم إدارة الأعمال، ص ٤٥.

(2) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 3.

(٣) فريحات، حيدر محمد وعواد، محمد سليمان، (١٩٩٨)، "بحوث العمليات – النظرية والتطبيقات"، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الاردن، ص ١٢.

٣. قد تكون المشكلة جديدة على المدير ومن ثم لا يتوافر لديه الخبرة اللازمة للتعامل معها.

٤. قد تكون مشكلة متكررة ويحاول المدير أن يوفر جهده ووقته من خلال بناء حل روتيني كمي لهذه المشكلة.

مثال تطبيقي للأسلوب الكمي في مؤسسة MERRILL LYNCH[1]:

MERRILL LYNCH هي مؤسسة سمسرة وخدمات مالية بها أكثر من 56000 موظف في 45 دولة، وتخدم عملائها من خلال وحدتي عمل، يخدم MERRILL LYNCH ومجموعة مؤسسة العملاء أكثر من 7000 مؤسسة وحكومة، وتخدم مجموعة MLPC حوالي أربعة ملايين أسرة، بالإضافة إلى 225000 مشروع ذات حجم صغير ومتوسط ومؤسسات مالية إقليمية، من خلال أكثر من 14000 استشارة مالية في 600 مكتب فرعي إضافي. أنشئت المجموعة الإدارية العلمية في 1986 وأصبحت جزءا من MLPC منذ عام 1991.

ومهمة هذه المجموعة هي إعطاء تحليل كمي نهائي عالمي لتدعيم استراتيجيات القرارات الإدارية ولتعزيز علاقة المستشار المالي بالعملاء.

لدى المجموعة الإدارية العلمية نماذج تحققت بنجاح ونظم متطورة لتحديد الأصول، التخطيط المالي، تكنولوجيا معلومات التسويق، قاعدة بيانات التسويق وقياس أداء فعالية المحفظة المالية، وعلى الرغم من أن الخبرة الفنية والهدف هي عوامل هامة

---

(1) Merrill Lynch Financial Advisor – Bank of America Corporation, (2014). http:// www. Wealthmanagement .ml.com/WM/Pages/Home.aspx.

بصورة واضحة في أي مجموعة تحليلية، إلا أن مجموعة الإدارة العلمية ينسب الكثير من نجاحها إلى مهارات الاتصال والعمل الجماعي والمهارات الاستثمارات.

يبدأ كل مشروع بالمقابلات الشخصية مع العملاء وتجهيز خطة العمل من مخطط تمهيدي لخلفية المشكلة وأهداف المشروع والطريقة والمصادر المطلوبة وجدول الوقت وإعداد النتائج.

عند هذه المرحلة يركز المحلل على الحل التطويري الذي يعطي قيمة معنوية وإنجاز سهل وكلما تقدم العمل، لابد أن تكون مقابلات العملاء متكررة ولآخر لحظة، ويكون العمل الجماعي ضرورياً لأن الأفراد لديهم مهارات مختلفة، ووجهات نظر ودوافع مختلفة ولابد أن يعمل الأفراد لتحقيق هدف عام، ويأخذ أعضاء المجموعة دورات في الطرق الجماعية والتسهيلات وحل النزاعات، وهم يمتلكون مدى واسعا من الوظائف المتعددة وكفاءات متعددة قابلة للتطوير، وتكون متحفزة لتقديم حلول تركز على أهداف المؤسسة، ويعتبر هذا الأسلوب لحل المشكلة وإنجاز التحليل الكمي صفة مميزة لمجموعة الإدارة العلمية ويترجم تأثير ونجاح المجموعة إلى دورات صعبة وأعمال متكررة واستسلمت المجموعة منحة EDELMAN السنوية التي تمنح من معهد بحوث العمليات وعلوم الإدارة بسبب الاستخدام الفعال لعلوم الإدارة من أجل نجاح المنظمة.

الفصل الثاني

نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models (LPM)

٢-١ مقدمة Introduction

يعتقد الكثيرون أن الموارد المتاحة للبشرية كثيرة وقابلة للاستدامة، والحقيقة أنها محدودة وتندر أحياناً، فموارد المياه الصالحة للشرب محدودة، البترول الخام محدود وقابل للنفاذ في المستقبل القريب، الأرض الصالحة للزراعة أو السكن محدودة، محدودية الوقت والموظفين والأموال المتاحة للشركات لإنجاز أعمالها، أضف إلى ذلك محدودية مساحات التخزين والمواد الخام.

من هنا يأتي الدور الفاعل لنماذج البرمجة الخطية لاستخدام الموارد المتاحة بالشكل الأمثل والملائم سواءً على صعيد الأشخاص أو الشركات أو الحكومات التي تعيش في بيئة تنافسية. تُعتبر البرمجة الخطية إحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تُعالج مسألة تخصيص أو توزيع الموارد أو الطاقات المحددة لتحقيق هدف مُعين، ويُعبر عن هذا الهدف بدالة خطية تُستخدم لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر وهذهِ العلاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة، وتسمى هذهِ الدالة بدالة الهدف (Objective Function)، وقد تكون دالة تعظيم الربح (Maximum Function)، أو دالة تقليل الكلفة أو الخسائر إلى أقل حد ممكن (Minimum Function)، أو دالة إنتاج، وتخضع هذهِ الدالة إلى قيود عبارة عن معادلات أو متباينات تعبر عن (المواد الأولية الخام، عدد ساعات العمل أو التشغيل، طاقة المكائن، كمية المبالغ المستثمرة في نشاط معين، الأيدي العاملة، مساحات الاراضي النادرة (التي تحتوي النفط أو مناجم الفحم والذهب)....ألخ).

٢-٢ الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية[1] Basic assumpations for L.P.

١. أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقهُ (مثلاً تحقيق أقصى ربح، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد مُمكن).

٢. أن تكون هنالك بدائل مُختلفة للوصول إلى الهدف أو طرق مختلفة لاستغلال الموارد المتاحة والمحدودة.

٣. أن تكون الموارد المُستخدمة محدودة لأن طريقة البرمجة الخطية تتمثل في كونها طريقة علمية تهدف إلى استخدام الموارد المحدودة أفضل استخدام لتحقيق هدف مُعين.

٤. يجب أن تكون هناك علاقة بين المُتغيرات أي توفر عنصر التأكيد وغياب الاحتمالات.

٥. التعبير عن دالة الهدف والقيود بمُعادلات أو مُتباينات خطية.

٦. أن يُعبر النموذج الخطي عن المشكلة قيد الدراسة، وليس العكس بأن تُصاغ المشكلة لتناسب النموذج المُعد مسبقاً.

---

(1) Ruhul A. Sarker & Charles S. Newton, (2008), 'Optimization Modeling – A Practical Approach', CRC Press – Taylor & Francis Group, USA, p. 39.

٢-٣ البرمجة الخطية وبعض مجالات تطبيقها[١]

L.P. and some of its application fields

١. **العسكرية:** تلعب دوراً هاماً في التخطيط العسكري واتخاذ القرار والتوزيع الأمثل للقدرات العسكرية المتاحة.

٢. **التحليل المالي:** كالمصارف وميزانية الدولة للحصول على التوزيع الأمثل حيث يحتاج المحلل المالي إلى اختيار سياسة مالية من بين عدة اختيارات، بهدف تحقيق أقصى عائد من الاستثمار.

٣. **الإدارية:** يوفر المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

٤. **توزيع ونقل البضائع:** لمعرفة كمية البضائع الواجب شحنها من كل مستودع إلى كل زبون بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن، وهذا يساعد العديد من الشركات التي لديها مستودعات في عدة مواقع مختلفة، لتحقيق طلبات الزبائن الذين يطلبون بضائع تلك الشركة.

٥. **الصناعة:** لتعظيم الربح وتخفيض تكلفة التصنيع والانتاج والنقل ووضع جدول انتاج وسياسة مخزون لمقابة الطلب مستقبلاً، الحالة المثلى أن يتم تحقيق كل من الجدول والسياسة والطلب.

٦. **الإنشاءات:** لبناء المشاريع الضخمة لتوفير الوقت المستخدم للمشروع.

٧. **التسويق:** لمعرفة ما هي أفضل طريقة لتوزيع ميزانية إعلان بين أنواع وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة، والتلفزيون، والصحف، والمجلات، وذلك لتحديد المزيج الإعلامي الذي يحقق أعلى عائد من الإعلان.

---

(١) الصفدي، محمد سالم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢١.

٨. **إدارة المستشفيات:** لضبط عملية التغذية والأدوية ضمن الإمكانيات المتاحة.

٩. **التخطيط:** من خلال متابعة المشـــاريع وإعداد الخطة الزمنية اللازمة لتنفيذ تلك المشاريع.

٢-٤ أمثلة لصياغة المشاكل باستخدام نماذج البرمجة الخطية

Examples of formulation problems using L.P. models

مثال (٢-١): من أجل تحضير نوعين من المُنتجات P_1 و P_2 نستخدم ثلاث أنواع من مُستلزمات الأنتاج S_1 و S_2 و S_3، حيثُ إن إحتياطي هذهِ المواد الأولية والمُتوفره لدينا معلوم، وكذلك المُعدلات اللازمة من هذهِ المواد لإنتاج كل وحدة من P_1 و P_2، وبما إن هذهِ المنتجات ستنزل للسوق للتصريف فإن الربح المتوقع من تصريف كل وحدة منتجة معلوم لدينا أيضاً ومعطى بالجدول الآتي:

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة		احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمُتاح للأستخدام
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	6	5	45
S_3	4	6	30
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	32	40	

والمطلوب وضع الخطة المثالية للانتاج بحيث نحصل على أكبر ربح مُمكن مراعين في ذلك الاحتياطي المتوفر أو المُتاح من مُستلزمات الانتاج، وإن السوق مفتوحة وتستوعب كامل الانتاج.

الحل: من إجل تصميم النموذج نفترض أن:

X_1 تُمثل كمية الانتاج من النوع الأول P_1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2 تُمثل كمية الانتاج من النوع الثاني P_2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

إن انتاج هذهِ الكميات يتطلب كمية من المواد الأولية التي ندعوها بمُستلزمات الانتاج، والتي لا يُمكن أن تُستهلك إلا بإطار ما هو متوفر لدينا حيثُ إن الكمية المُتاحة محدودة ويجب إستغلالها لانتاج البضائع الأكثر ربحية، أي البضائع التي توفر لنا فائض وأعظم مقدار من الربح، وهذا ما عبرنا عنهُ من خلال الكمية المنتجة X_1 و X_2، ومن خلال الاحتياطي المتوفر والذي يُمكن التعبير عنهُ بالمتباينات الخطية الآتية:

قيد المادة الأولية S_1 ..... $2X_1 + 5X_2 \leq 20$

قيد المادة الأولية S_2 ..... $6X_1 + 5X_2 \leq 45$

قيد المادة الأولية S_3 ..... $4X_1 + 6X_2 \leq 30$

نُلاحظ من العلاقات الرياضية الموضوع كقيود لحل المُشكلة، أنهُ لا يجوز أن تتجاوز كمية مُستلزمات الانتاج الضرورية لعمليات الانتاج حجم الاحتياطي المُتاح الموجود لدينا من المواد الأولية.

وبناء على القيود الموضوعة فإن نوع المنتج الذي لا نرغب بإنتاجه لضعف ربحيته سوف يأخذ القيمة صفر $(X_i = 0)$، وهذا يعني إن الانتاج من البضاعة ذات النوعية (i) سيكون معدوماً، وإذا رغبنا بانتاج البضاعة P_i حتى لو كانت بكميات قليلة فإن $(X_i>0)$، وأنطلاقاً من هذا فإن الكميات التي يُمكن إنتاجها $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ يُمكن أن تأخذ إحدى حالتين هُما: أما حالة إنعدام الانتاج، أو حالة الانتاج، ولا ثالث لهاتين الحالتين، أي لا يوجد لدينا الحالة السلبية لأن الانتاج السلبي ليس لهُ معنى اقتصادي في مسألتنا.

لذلك يجب أن نُعبر في النموذج الرياضي عن رفضنا للانتاج السالب بقيود خاصة نُضيفها للنموذج وندعوها بقيود عدم السلبية بالصيغة الآتية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0$$

إن الهدف النهائي للحل في مثل هذهِ المسائل هو الحصول على الحد الأعظم من الربح بشرط أن يتوفر لنا في السوق المُفتوحة تصريف وبيع كامل للبضائع المُنتجة، ونُعبر عن ذلك من خلال تابع يحتوي على (n) عدد من المتغيرات تُمثل الانتاج البضائعي، والذي يُمكن تحديدهُ في مثالنا بالمتغيرين (X_1 , X_2) وإن بيع الكمية X_1 من البضاعة P_1، والكمية X_2 من البضاعة P_2 تُعطي ربحاً يتناسب طردياً مع كميات الوحدات من البضائع (X_1 , X_2)، فنحصل على ربحاً من كمية المنتج الأول مقدارهُ ($32X_1$)، وربحاً من كمية المنتج الثاني مقدارهُ ($40X_2$) وحدة نقدية، ويكون إجمالي الأرباح من مُختلف البضائع المُنتجة مساوياً للعلاقة[1]:

$$Z(x) = 32X_1 + 40X_2 \qquad \text{(وحدة نقدية)}$$

وبما إن النموذج لا يحدد الكميات الواجب انتاجها من البضائع فإن هنالك عدداً كبيراً من الحلول التي يُمكن أن تحقق قيود المسألة، ولكن لا تُحقق الحالة المثلى، والحل الوحيد الذي يُحقق مثلوية المسألة هو الحل الذي تُبنى على أساسهِ خُطة الانتاج، ويكون هو البديل المثالي الذي يجب أن نتخذ بهِ القرار المثالي، بحيث يُحقق كامل قيود المسألة ويُعطينا أعظم ربح مُمكن (Maximum)، الشيء الذي نعتبرهُ هدفاً أساسياً للمشكلة المطروحة والذي نبحث عنه لاتخاذ القرار المثالي وذلك من خلال أهم توابع النموذج

(١) نستخدم عادة الرمز Z(x) أو Z أو X_0 أو أي رمز آخر للدالة على رمز دالة الهدف.

الرياضي وهو التابع الهدفي، والذي يشكل مع باقي قيود النموذج وقيد عدم السلبية النموذج الرياضي للمسألة الآتي:

Max. $Z(x) = 32 X_1 + 40 X_2$ (دالة الهدف)

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$2 X_1 + 5 X_2 \leq 20$ ..... S_1 قيد المادة الأولية

$6 X_1 + 5 X_2 \leq 45$ ..... S_2 قيد المادة الأولية

$4 X_1 + 6 X_2 \leq 30$ ..... S_3 قيد المادة الأولية

$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

عند هذهِ المرحلة يُمكن تعميم مسائل انتاج البضائع ونموذجها الخطي أعلاه في مختلف القطاعات المنتجة الصناعية والزراعية والتجارية، وذلك بافتراض إن المؤسسة لديها (n) نوع من البضائع أو المنتجات، ولديها (m) نوع من مُستلزمات الانتاج الواجب توفرها للعملية الانتاجية بما فيه المواد الأولية والأصول الثابتة والأيدي العاملة والأراضي الزراعية وغيرها، وسنستخدم الرموز الآتية[1]:

S_i تمثل أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في العملية الانتاجية حيثُ يُمكن أن تأخذ قيم (i) عدداً من الأنواع تساوي (m) حيثُ $(i=1,2,3,\ldots,m)$.

B_i تمثل الاحتياطي المُتاح أو المتوفر من كل نوع من أنواع مستلزمات الأنتاج (m) حيثُ $(i=1,2,3,\ldots,m)$.

P_j تُمثل أنواع البضائع التي يُمكن انتاجها من خلال المؤسسة الانتاجية وعددها (n) حيث $(j=1,2,3,\ldots,n)$.

---

(١) البلخي، زيد تميم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥.

a_{ij} هي كمية المواد الأولية أو مستلزمات الانتاج أو ساعات العمل (عوامل الانتاج المختلفة) من النوع (i) والتي تُنفق لانتاج وحدة بضائعية واحدة من النوع (j) حيثُ ($i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$) إذ أن كل نوع من البضائع تحتاج إلى كميات مُختلفة من مستلزمات الانتاج ندعوها بمُعدلات الانتاج.

بهذا يُمكن وضع الشكل العام لمسائل انتاج البضائع كما في جدول (٢-١) الآتي[1][2]:

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة				احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمتاح للاستخدام
	P_1	P_2	...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة بضاعة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	C_1	C_2	...	C_n	

جدول (٢-١) يوضح الشكل العام لمسائل انتاج البضائع

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 9.

وباعتبار أن X_j هي كمية وحدات البضائع من النوع (j) الواجب إنتاجها من كل الأنواع، وأن هذه الكميات من البضائع يجب أن تتفق مع قيد عدم السلبية.

بهذا يُمكن وضع الصيغة العامة للنموذج الرياضي الخطي على النحو الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n \qquad \text{(دالة الهدف)}$$

Sub. to

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq b_m$$
$$X_j \geq 0 \quad \forall (j = 1,2, \ldots,n)$$

مثال (٢-٢): أستلمت الشركة العامة للصناعات البتروكيمياوية في البصرة طلب للحصول على 1400 كغم من خليط حبيبات بلاستيكية (بولي آثيلين) عالي الكثافة (HDPE) التي تتكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات الآتية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث.

وأن كلفة الكغم من المركب الأول والثاني والثالث هي 2 و3 و4 ألف دينار على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

المتغيرات التي ترتبط بالمسألة عبارة عن عدد الكيلوغرامات من كل مركب والتي ستدخل في تكوين الخليط البتروكيمياوي، حيثُ نفرض أن:

X_1: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الأول حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$.

X_3: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثالث حيثُ $X_3 \geq 0$.

دالة الهدف: كلفة الكغم الواحد من المركب الأول تساوي 2 ألف دينار فإذا استخدمنا (X_1) كغم من هذا المركب فستكون الكلفة $2X_1$ ألف دينار، بنفس الطريقة إذا استخدمنا X_2 كغم من المركب الثاني فستكون الكلفة $3X_2$ ألف دينار، كذلك إذا استخدمنا (X_3) كغم من المركب الثالث ستكون التكلفة $4X_3$ ألف دينار.

وحيث أن الهدف هو تقليل الكلفة (Min.) لذا فإن دالة الهدف ستكون على الصورة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

القيود الفنية:

- القيد الفني الأول: شرط الطلبية أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول لذا يتم صياغة القيد الأول بالشكل $X_1 \leq 400$.
- القيد الفني الثاني: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني أي أن $X_2 \geq 200$.
- القيد الفني الثالث: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث أي أن $X_3 \geq 150$.
- القيد الفني الرابع: كمية الطلب من الخليط يجب أن تساوي 1400 كغم، عندها سيكون القيد الرابع هو $X_1 + X_2 + X_3 = 1400$.

مما سبق نجد أن نموذج البرمجة الخطية والذي سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بالصيغة الآتية:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

Sub. to.

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\leq 400 \\ X_2 &\geq 200 \\ X_3 &\geq 150 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 1400 \end{aligned}\right\} \text{القيود الفنية}$$

$X_j \geq 0$ where $j = 1,2,\ldots,n$ قيود عدم السالبية

مثال (٢-٣): تنتج شركة آسيا لصناعة الأصباغ المحدودة – فرع بغداد نوعين من مواد الأصباغ آسيا (A) و كريستال (B)، حددت الشركة إن انتاجها من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر، كما إن طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى 125 لتر يجب تحقيقها، ويحتاج انتاج لتر من المادة A إلى ساعتين ومن المادة B إلى ساعة واحدة، علماً أن عدد ساعات الانتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط، وأن تكلفة انتاج اللتر الواحد من المادة A وB هو ألفين وثلاثة آلاف دينار على التوالي، أن هدف الشركة هو تحقيق المتطلبات السابقة بأقل تكلفة إنتاج مُمكنة.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة A حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة B حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات العميل بأقل تكلفة انتاج مُمكنة، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من ثلاث قيود هي:

١. قيد الانتاج من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر:

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

٢. يجب تحقيق قيد طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى وهو 125 لتر:

$$X_1 \geq 125$$

٣. قيد عدد ساعات الإنتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط:

$$X_1 + X_2 \leq 600$$

٤. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sub to

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

$$X_1 \geq 125$$

$$X_1 + X_2 \leq 600$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مثال (٢-٤): تقوم إحدى مُنشآت وزارة التجارة العراقية بوضع خطة لاستيراد ثلاثة أنواع من السلع لغرض تسويقها في السوق المحلي، علماً أن نفقات الشراء والنفقات الأخرى موضحة بالجدول الآتي:

المبالغ المُخصصة للسلعة	المبالغ بآلاف الدنانير للسلعة			النفقات
	الثالثة	الثانية	الأولى	
مساوية لـ 400000 دينار	1	2	2	نفقات التسويق
على الأقل مساوية لـ300000 دينار	2	1	2	نفقات إدارية
على الأكثر مساوية لـ100000 دينار	2	2	4	نفقات متنوعة
	6	4	5	سعر الشراء

المطلوب: تحديد الحجم الأمثل للاستيراد والذي يحقق أقل كلفة مُمكنة.

الحل: لصياغة النموذج الخطي يجب وضع الفرضيات الآتية:

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الأول حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات التي سيتم استيرادها من السلعة الثالثة حيثُ $X_3 \geq 0$

$$\text{Min. } X_0 = 5X_1 + 4X_2 + 6X_3 \qquad \text{(دالة الهدف)}$$

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 = 400000 \quad \text{..... قيد نفقات التسويق}$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 300000 \quad \text{..... قيد النفقات الأدارية}$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 100000 \quad \text{..... قيد نفقات متنوعة}$$

$$X_1 \geq 0 \, , \, X_2 \geq 0 \, , \, X_3 \geq 0 \quad \text{..... قيد عدم السلبية}$$

مثال (٢-٥): ينتج مصنع ميديا للمناديل الورقية في السليمانية ثلاثة نماذج (I, II, III) من المناديل، باستخدام نوعين من المواد الخام A و B، علماً بأن الكميات المُتاحة من كل نوع هي 12000 و 15500 وحدة من المادة A و B على التوالي، والجدول التالي يبين الكميات المطلوبة من كل نوع من الخامات لانتاج المنتجات الثلاثة. إذا كان الوقت المطلوب لكل وحدة من النموذج الأول هو ضعف الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثاني وثلاثة أمثال الوقت المطلوب لوحدة من النموذج الثالث.

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث			ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
	I	II	III	
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500

إن الطاقة التشغيلية للمعمل تستطيع أن تنتج ما يكافيء 700 وحدة من النموذج الأول، ولقد أشارت دراسة السوق لمحافظات العراق إلى أن الحد الأدنى المطلوب من كل نوع هو 200 و 200 و 150 وحدة على التوالي، فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من الأنواع الثلاث على التوالي هي 3 و 2 و 6 ألف دينار. المطلوب كتابة المسألة أعلاه بصيغة برمجة خطية لتحديد عدد الوحدات المصنعة من كل نموذج بحيث تحصل الشركة على أعظم ربح مُمكن.

الحل: لصياغة النموذج الرياضي يجب إعادة تنظيم المعلومات التي بحوزتنا وفق الجدول التالي ووضع الفرضيات الآتية:

المواد الخام	المتطلبات لكل وحدة من أنواع النماذج الثلاث			ما مُتاح من كل نوع من الماده الخام
	I	II	III	
A	7	3	5	12000
B	4	2	7	15500
ربح الوحدة الواحدة (بالألاف)	3	2	6	
الحد الأدنى المطلوب من كل نوع	200	200	150	

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول I حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني II حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض X_3 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثالث III حيثُ $X_3 \geq 0$

Max. $X_0 = 3X_1 + 2X_2 + 6X_3$ (دالة الهدف)

Sub. to

قيد المادة الخام من نوع A ..... $7X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 12000$

قيد المادة الخام من نوع B ..... $4X_1 + 2X_2 + 7X_3 \leq 15500$

قيد الطاقة التشغيلية للمعمل ..... $X_1 + 0.5X_2 + (1/3)X_3 \leq 700$

قيود متطلبات السوق من المنتجات (وهو نفسه قيد عدم السالبية)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 200 \\ X_2 \geq 200 \\ X_3 \geq 150 \end{array}\right\} \text{-----}$$

مثال (٢-٦): تنتج شركة صناعات الأصباغ الحديثة التابعة لوزارة الصناعة والمعادن في بغداد أربعة مُنتجات يتم انتاجها باستخدام نوعين من المكائن، الوقت المطلوب لكل وحدة مُنتجة مقدراً بالساعة على الماكنة الأولى هو (2، 3، 4، 2) والوقت على الماكنة

الثانية هو (3، 2، 1، 2)، إذا علمت أن الكلفة الكلية لانتاج كل وحدة مُعتمد على التكاليف المباشرة لوقت الماكنة، وإن كلفة الساعة الواحدة للماكنة الأولى والثانية تساوي 10 و 15 ألف دينار على التوالي، وإن عدد الساعات الكلي المخصص للمنتجات الأربعة على الماكنتين يساوي 500 و380 ساعة، أما سعر البيع للوحدة الواحدة فهو على الترتيب: 80 , 70 , 55 , 45 ألف دينار.

المطلوب: صياغة المسألة بصورة برمجة خطية لتعظيم الربح الصافي من بيع المنتجات الأربعة.

الحل: في البداية يتم وضع الفرضيات الخاصة بالمسألة وهي:

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

و X_2 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

و X_3 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 3 حيثُ $X_3 \geq 0$.

و X_4 يُمثل عدد الوحدات المُنتجة من المُنتج 4 حيثُ $X_4 \geq 0$.

هامش الربح لكل وحدة من المنتجات الأربعة = سعر البيع – تكاليف الإنتاج

$X_1 = 80 - (2(10) + 3(15)) = 15$

$X_2 = 70 - (3(10) + 2(15)) = 10$

$X_3 = 55 - (4(10) + 1(15)) = 0$

$X_4 = 45 - (2(10) + 2(15)) = -5$

بهذا يُمكن صياغة دالة الهدف (دالة تعظيم للربح الصافي) وقيود المسألة بالصيغة الآتية:

Max. $X_0 = 15X_1 + 10X_2 + 0X_3 - 5X_4$

Sub. to

قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الأولى $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 500$

قيد عدد الساعات المُخصصة على الماكنة الثانية $3X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 380$

قيد عدم السلبية $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

مثال (٢-٧): ترغب الشركة العامة للصناعات الجلدية – بغداد في انتاج نوعين من الحقائب النسائية، وذلك بعد أن عُلم من إدارة التسويق أن هناك طلباً عليها إذا أمكن انتاجها بسعر منافس للأنواع المماثلة في السوق، وبعد دراسة جيدة لمراحل انتاج هذه الحقائب أتضح أن انتاج الحقيبة الواحدة يتطلب المراحل الآتية:

١. قص وصبغ الجلود.
٢. الخياطة.
٣. التشطيبات (إضافة سحاب، الإقفال، إلخ...).
٤. الفحص والتغليف.

كما تمكنت الشركة من الحصول على المعلومات المعطاة في الجدول إدناه عن الوقت اللازم بالساعة لانتاج كل نوع في كل مرحلة والطاقة الانتاجية المتوفرة في الشركة محسوبة بالساعة أيضاً:

نوع العملية / نوع الحقيبة	القص والصبغ	الخياطة	التشطيب	الفحص
حقيبة عادية	5	1.25	1	1.4
حقيبة ممتازة	3	2.5	1.5	1
الطاقة الإنتاجية المتوفرة	لا تقل عن 525	لا تزيد عن 600	لا تزيد عن 585	لا تزيد عن 315

وبدراسة مواصفات وتكاليف الحقائب المطلوب انتاجها قررت ادارة المحاسبة أن يكون الربح للحقيبة العادية 10 ألاف دينار وللحقيبة الممتازة 9 ألاف دينار.

المطلوب: كم يجب أن تنتج الشركة من كل نوع بحيث يحقق أقصى ربح ممكن.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الحقيبة العادية حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من للحقيبة الممتازة حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات السوق لتحقيق أقصى ربح ممكن، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة التالية علماً إن ربح الشركة سوف يأتي من مصدرين:

ربح من انتاج X_1 من الحقائب العادية = $10\ X_1$

ربح من انتاج X_2 من الحقائب الممتازة = $9\ X_2$

$$\text{Max. } Z = 10\ X_1 + 9\ X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 4 قيود هي:

١. قيد الطاقة الانتاجية لعملية القص والصبغ لا تقل عن 525 ساعة:

$$5\ X_1 + 3\ X_2 \geq 525$$

٢. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الخياطة لا تزيد عن 600 ساعة:

$$1.25\ X_1 + 2.5\ X_2 \leq 600$$

٣. قيد الطاقة الانتاجية لعملية التشطيب لا تزيد عن 585 ساعة:

$$X_1 + 1.5\ X_2 \leq 585$$

٤. قيد الطاقة الانتاجية لعملية الفحص لا تزيد عن 315 ساعة:

$$1.4\ X_1 + X_2 \leq 315$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 10 X_1 + 9 X_2$$

Sub. to

$$5 X_1 + 3 X_2 \geq 525 \quad ...(1)$$

$$1.25 X_1 + 2.5 X_2 \leq 600 \quad ...(2)$$

$$X_1 + 1.5 X_2 \leq 585 \quad ...(3)$$

$$1.4 X_1 + X_2 \leq 315 \quad ...(4)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

٢-٥ الصيغة العامة لنماذج البرمجة الخطية(*)

General formulation of L.P. models

بعد العرض السابق لأمثلة تتعلق بالبرمجة الخطية، يُمكن صياغة البرنامج الخطي الذي يتضمن دالة الهدف (Z or X_0) والقيود التي من المُمكن أن تأخذ العلاقة ($\geq$, $=$, $\leq$)، وأن جميع متغيرات القرار X_i تكون غير سالبة ($X_i \geq 0$) لأنها متغيرات تتصل بالواقع لذلك فالنتيجة السالبة لها تصبح كميات غير حقيقية (لأنها قد تُعبر عن كمية منتجة، خليط، زبائن وغيرها – وهي كميات موجبة بطبيعة الحال ولا يسمح بأن تكون قيمة سالبة)، ولذلك يُمكن وضع الصيغة العامة بدلالة أشارة المجموع(1):

(*) راجع المصدر:

الفضل، مؤيد عبد الحسين، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، **مصدر سبق ذكره**، الفصل الثاني، ص ٦٥، للمزيد من نماذج البرمجة الخطية المستخدمة في أتخاذ القرار الأمثل.

(1) Winston Wayne L., (2004), "Operations Research: Application and Algorithms", Thomson Learning, USA, p. 23.

$$Max \text{ or } Min. \quad Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \leq b_i \quad \forall \ (i = 1,2,\dots,m) \& (j = 1,2,\dots,n)$$

$$X_j \geq 0 \quad \forall \ (j = 1,2,\dots,n)$$

حيثُ b_i , a_{ij} , C_j ثوابت تُحدد من سياق المسألة لكل قيم i و j.

X_j المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بشأنها.

أو باستخدام إشارة المصفوفات والمُتجهات:

Max. or Min. Z = C X

Sub. to

$$A\,X \ (\leq , = , \geq) \ B$$

$$X \geq 0$$

حيثُ $C = [C_1 \ C_2 \dots C_n]$ متجه صفي عدد عناصرهُ n، ويُمثل عناصر مُعاملات دالة الهدف.

وإن $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$ مُتجه عمودي عدد عناصرهُ n، ويُمثل مُتغيرات القرار.

وإن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة (m × n) تُمثل مُعاملات مُتغيرات القرار في القيود.

إن الخطوة الرئيسية التالية بعد صياغة نموذج البرمجة الخطية هي تحليل النموذج رياضياً، لكن نظراً لاختلاف صيغ البرمجة الخطية فمن الضروري تعديل هذه الصيغ لتحديد نموذج حل مناسب، لهذا توجد صيغتان هما الشكل أو الصيغة القانونية (Canonical Form)، والصيغة القياسية أو المعيارية (Standard Form)، وكما موضح بالشكل الآتي:

٢-٥-١ الصيغة القانونية Canonical Form

يُمكن وضع الشكل القانوني التالي للصيغة العامة للبرمجة الخطية التي تم الإشارة إليها أعلاه:

$$Max \;\; Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \;\leq\; b_i \quad \forall \;\; (i = 1,2,\dots,m)\&(j = 1,2,\dots,n)$$

$$X_j \geq 0 \quad \forall \;\; (j=1,2,\dots,n)$$

وخصائص هذهِ الصيغة هي[1] [2]:

١. يتم تحويل جميع متغيرات القرار X_i إلى الإشارة $\geq$ (لأنها كمية موجبة).

٢. يتم تحويل إشارة جميع قيود المسألة إلى نوع أقل أو يساوي $\leq$.

٣. جعل دالة الهدف من نوع .Max.

وبالإمكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني أو العام باستخدام عمليات التحويل الأولية (Elementary Transformation) والتي يتم أستعراضها بالشكل المُبسط الآتي:

1. Min. Z $\xrightarrow{\times(-1)}$ Max. $(-Z)$ = Max. W , Where $W = (-Z)$

2. $a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ $-a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$

3. قيد المُساواة يتحول إلى مُتباينتين مُتعاكستين بالاتجاه هما $\leq$ و $\geq$ ثم نُحول الـ $\geq$ إلى $\leq$ وذلك بضربها بالإشارة السالبة كما في المثال الآتي:

$a_1 X_1 + a_2 X_2 = b \longrightarrow a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$

$\longrightarrow a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \xrightarrow{\times(-1)} -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$

4. بالنسبة للقيد المُتكون من قيمة مُطلقة في الطرف الأيسر منهُ فيتحول إلى مُتباينتين بالشكل الآتي:

$|a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b| \longrightarrow +(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b)$

$\longrightarrow -(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b)$

---

(١) صادق، ثناء رشيد، (٢٠٠١)، "بحوث العمليات – البرمجة الخطية"، منشورات جامعة عمر المختار – البيضاء – ليبيا، ص ٢٥.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 10.

5. بالنسبة للمتغير غير المُقيد بالإشارة (أي أن إشارتهُ غير مُحددة فيما أذا كانت موجبة أو سالبة أو صفر) فيُمثل بالفرق بين متغيرين إشارة كل منهما غير سالبة، كما في المثال الآتي:

$$If \;\; X_1 \;\; Unrestricted\ in\ Sign$$
$$\therefore \;\; let \;\; X_1 = (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1) \quad Where \quad \bar{X}_1 \, , \bar{\bar{X}}_1 \geq 0$$

مُلاحظة (٢-١): يتحول قيد القيمة المُطلقة والمُساواة إلى أربع قيود كما في القاعدة الآتية:

If $|a_1 X_1 + a_2 X_2| = b$

- $+ (a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$
  - $a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$
  - $- a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq - b$
- $- (a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$
  - $- (a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq b$
  - $+ (a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq - b$

مثال (٢-٨): حول مُشكلة البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القانونية (Convert the L.P.P. below to the Canonical Form)

Min. $Z = 3 X_1 - 3 X_2 + 7 X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + 3 X_3 \geq 50$$
$$5 X_1 + 3 X_2 = 20$$
$$|5 X_1 + 8 X_3| \leq 100$$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign

الحل: يجب تحويل الـ(L.P.P.) إلى الصيغة القانونية باستخدام عمليات التحويل الأولية الآتية:

$\because X_3$ *Unrestricted in Sign*

$\therefore$ *let* $X_3 = (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$ *Where* $\bar{X}_3 , \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

Min. $Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ Max. W = Max. $(-Z)$

Where $W = -Z = -3X_1 + 3X_2 - 7(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3)$

Sub. to

$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 50$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ $-X_1 - X_2 - 3(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq -50$

$5X_1 + 3X_2 = 20$ $\longrightarrow$ $5X_1 + 3X_2 \leq 20$

$\longrightarrow$ $-5X_1 - 3X_2 \leq -20$

$|5X_1 + 8X_3| \leq 100$ $\longrightarrow$ $5X_1 + 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100$

$\longrightarrow$ $-5X_1 - 8(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \leq 100$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign $\longrightarrow$ $X_1, X_2, \bar{X}_3, \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$

٢-٥-٢ الصيغة القياسية Standard Form

تُعتبر هذهِ الصيغة أفضل من السابقة لأنها تُستخدم في الطريقة العامة (Simplex Method) المعتمدة في تحليل البرامج الخطية، وأهم خصائصها هي[1]:

١. تحويل جميع القيود الواردة بالمسألة إلى معادلات ماعدا القيد الخاص بإشارة المتغيرات.

٢. عناصر الطرف الأيمن (Right Hand Side (R.H.S.)) من كل قيد تكون بالصيغة $b_i \geq 0$.

٣. جميع متغيرات القرار تكون بالصيغة أكبر أو يساوي للصفر $X_j \geq 0$.

٤. دالة الهدف تكون من نوع Minimum أو Maximum.

مُلاحظة (٢-٢): يتم تحويل قيود المُتباينات إلى مُساواة (معادلات) وذلك بإضافة أو طرح متغيرات وهمية ($S_i \geq 0$) إلى الطرف الأيسر من كل قيد، وهذهِ المتغيرات تضاف للقيود من نوع أصغر أو يساوي (≤)، وتطرح من القيود من نوع أكبر أو يساوي (≥)، وكما موضح في القاعدة الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \\ \underline{\text{or}} \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{القياسية}} \begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 - S_1 = b \\ a_1 X_1 + a_2 X_2 + S_2 = b \end{array}$$

حيثُ $S_i \geq 0$ متغيرات وهمية لا تؤثر على الحل.

مُلاحظة (٢-٣): يُدعى المتغير الوهمي بالمتغير المُهمل (Slack Var.) عندما يضاف للطرف الأيسر للقيد من نوع (≤) وذلك لأن b هي طاقة أو أمكانية متوفرة، لذا فإن S_i

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

تُمثل طاقة أو أمكانية غير مُستهلكة أو مُهملة ينبغي أضافتها للطرف الأيسر لتصبح المتباينة مُساواة، ويُدعى المتغير الوهمي بالمتغير الفائض (Surplus Var.) عندما يطرح من الطرف الأيسر للقيد من نوع (≥) وذلك لأن b تُمثل كمية مطلوبة لذا S_i هي كمية فائضة أو زائدة عن الكمية المطلوبة ينبغي طرحها من الطرف الأيسر لتصبح المُتباينة مُساواة.

تلعب الصيغة القياسية دوراً مهماً في حل مسائل L.P.P. وبصورة عامة إذا كانت لدينا المسألة الآتية:

$$Max.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \leq b_i$$

$$X_j \geq 0 \ , b_i \geq 0$$

القياسية

$$Max.Z - \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0S_i = 0$$

$$\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j + S_i = b_i$$

$$X_j \geq 0 \ , b_i \geq 0 \ , S_i \geq 0$$

مثال (٢-٩): أكتب مسألة البرمجة الخطية التالية بالصيغة القياسية:

Max. $Z = 3X_1 - 2X_2$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 2$$

$$X_1 + 3X_2 = 5$$

X_1, X_2 Unrestrected in sign.

الحل: يتم في البداية الاستعاضة عن المتغيرين X_1, X_2 بمتغيرات موجبة وذلك بسبب أنهما غير محددان بإشارة (Unrestricted in sign) كما ورد في قيد عدم السالبية في المسألة:

$$\text{Let } \begin{Bmatrix} X_1 = \overline{X}_1 - \overline{\overline{X}}_1 \\ X_2 = \overline{X}_2 - \overline{\overline{X}}_2 \end{Bmatrix} \text{ where } \overline{X}_1, \overline{\overline{X}}_1, \overline{X}_2, \overline{\overline{X}}_2 \geq 0$$

$$Max.Z - 3\left(\overline{X}_1 - \overline{\overline{X}}_1\right) + 2\left(\overline{X}_2 - \overline{\overline{X}}_2\right) + 0\,S_1 + 0\,S_2 = 0$$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \geq 3 \;\rightarrow\; \overline{X}_1 - \overline{\overline{X}}_1 - 2\left(\overline{X}_2 - \overline{\overline{X}}_2\right) - S_1 = 3$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 2 \;\rightarrow\; 3\left(\overline{X}_1 - \overline{\overline{X}}_1\right) + 4\left(\overline{X}_2 - \overline{\overline{X}}_2\right) + S_2 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 = 5 \;\rightarrow\; \overline{X}_1 - \overline{\overline{X}}_1 + 3\left(\overline{X}_2 - \overline{\overline{X}}_2\right) = 5$$

$$\overline{X}_1, \overline{\overline{X}}_1, \overline{X}_2, \overline{\overline{X}}_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مع مُلاحظة إن إدراج مُعاملات المُتغيرات الوهمية S_1، S_2 في دالة الهدف بقيم صفرية لا يُغير دالة الهدف.

٢-٦ تحليل مسائل البرمجة الخطية L.P.P. Analysis

يتم تحليل مسائل البرمجة الخطية لتحديد قيم المتغيرات المطلوب أتخاذ القرار بشأنها X_j والتي تُعظم أو تُقلل قيمة دالة الهدف، أما بأستخدام الطريقة البيانية (طريقة الرسم) (Graphical Method) في حالة وجود متغيرين، أو بأستخدام الطريقة العامة (Simplex Method) عند وجود متغيرين أو أكثر[١].

وهنالك بعض المُصطلحات المُهمة التي يجب معرفتها مسبقاً قبل الإطلاع على هاتين الطريقتين وهي:

(١) شمخي، عدنان، وحسن، ضويه، (١٩٨٨)، "مقدمة في بحوث العمليات"، مطبعة الحكمة، جامعة بغداد، ص ٣٥.

١. **الحل المقبول (Feasible Solution (F.S.:** وهو الحل $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ الذي لا يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية ويحقق كافة القيود لاستخراج قيم X_j (بغض النظر عن كون قيم X_j موجبة أو سالبة أو صفر).

٢. **الحل غير المقبول (غير مُمكن) .Infeasible S** : وهو الحل الذي يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية الواردة بالمسألة.

٣. **الحل الأساسي المقبول (.Basic F. S. (B.F.S.:** يُسمى الحل الأساسي مقبولاً إذا كان عدد المتغيرات الموجبة فيه لا يتجاوز عدد القيود m (قيم X_j موجبة أو صفرية بقدر عدد القيود).

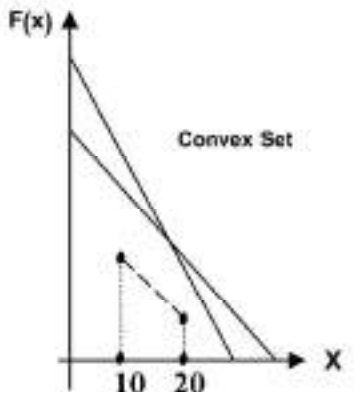
٤. **الحل الأساسي المقبول غير المُفكك (غير مُجزء، غير مُنحل) Non-Degenerate .B.F.S:** يكون الحل الأساسي المقبول غير مُفكك إذا أحتوى بالضبط على m من المتغيرات الموجبة $X_j > 0$.

٥. **الحل الأمثل (.Optimal Solution (O.S:** وهو أفضل الحلول المقبولة والذي يحقق كافة القيود، إضافة إلى ذلك يجعل قيمة دالة الهدف في نهايتها العظمى أو في نهايتها الصغرى، وقد يوجد للمسألة حل أمثل وحيد (.Unique O.S) أو عدة حلول مثلى (.Multiple O.S)، ويعطي تعدد الحلول المثلى عادةً مرونة أكبر لمُتخذي القرار لدى قيامهم بتنفيذ أحدها.

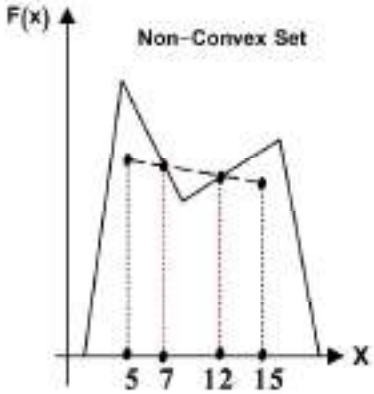
٦. **حل غير أمثل Non-Optimal Solution:** كل حل لا يُمكن تصنيفهُ كحل أمثل يسمى حلاً غير أمثل سواء كان مقبولاً أو غير مقبول.

٧. **المجموعة المُحدبة Convex Set:** هي مجموعة من النقاط $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$، كل زوج منها X_1 و X_2 يُكون قطعة مستقيم كاملة تربط بين هاتين النقطتين في المجموعة وتحقق العلاقة:

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in X \qquad \text{for } 0 \leq \lambda \leq 1$$



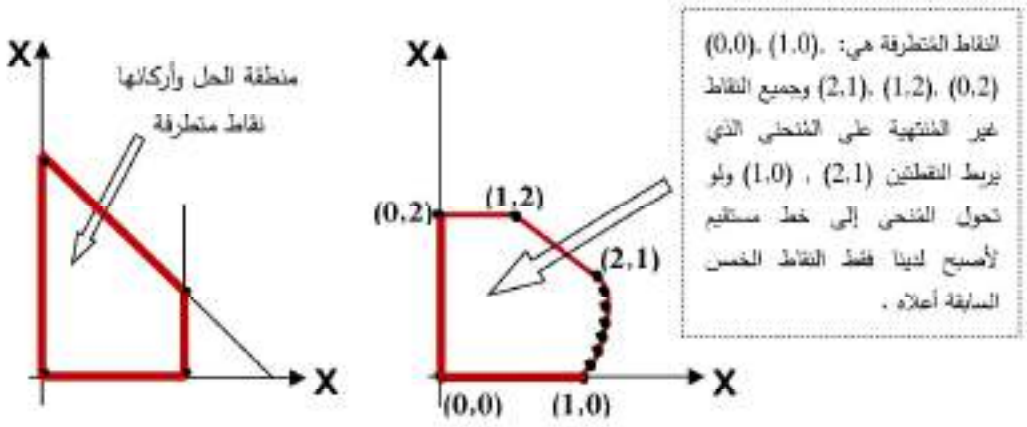
$\lambda = 0.5 \rightarrow 0.5(10) + 0.5(20) = 15 \in X$
$\lambda = 0.3 \rightarrow 0.3(10) + 0.7(20) = 17 \in X$



$\lambda = 0.5 \rightarrow 0.5(5) + 0.5(7) = 6 \in X$
$\lambda = 0.3 \rightarrow 0.3(12) + 0.7(15) = 14.1 \in X$

وتبرز أهمية المجموعة المُحدبة بأن فضاء الحل لمسائل البرمجة الخطية هو دوماً مجموعة مُحدبة، وهذا يُسهل عملية الحصول على الحل الأمثل.

٨. **النقطة المُتطرفة Extreme Point:** أي نقطة $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ في المجموعة المحدبة هي نقطة مُتطرفة إذا كان X لا يُمكن التعبير عنها كتوافيق مُحدبة لأية نقطتين في المجموعة المُحدبة.



٢-٧ الطريقة البيانية (الرسم) لحل مسائل البرمجة الخطية Graphical Method

يُمكن استخدام هذهِ الطريقة لإيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرين، وتستند هذهِ الطريقة على تحديد منطقة الحل المقبول (Feasible Solu. Space) وهي منطقة مُغلقة بكافة القيود الواردة في المسألة، ثم تحديد النقطة أو النقاط المُتطرفة التي تحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف[1].

ويُمكن تلخيص الخطوات الأساسية لهذهِ الطريقة بالنقاط الآتية:

١. يتم تحويل إشارة المتباينات إلى حالة مساواة، ثم نرسم الخطوط المستقيمة المُمثلة لهذهِ القيود.

٢. نحدد منطقة الحل لكل قيد حيث نعوض نقطة الأصل في القيد فإذا تحققت علاقة القيد فمنطقة الحل باتجاه نقطة الأصل، وبخلافة فمنطقة الحل تبتعد عن نقطة

(1) Hamdy A. Taha, (2007), "Operations Research: An Introduction", 8th Edition ,Pearson Prentice Hall, p. 15.

الأصل، وفي حالة المساواة تكون منطقة الحل هي فقط النقاط الواقعة على ذلك المستقيم.

٣. جميع الخطوط المستقيمة يجب أن تقع في الربع الأول لأن $X_i \geq 0$، وبخلافه يتم إمداد الخط ليصل إلى الربع الأول، إلا إذا كان قيد عدم السلبية يُشير إلى غير ذلك.

٤. المُضلع الناتج من تقاطع مناطق الحل لجميع المستقيمات يُمثل منطقة الحل المقبول.

٥. نُحدد نقطة أو نقاط مُتطرفة في منطقة الحل المقبول والتي تحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف (تدعى طريقة نقاط الزوايا).

٦. نرسم المستقيم المُمثل لدالة الهدف (خطوط الربح) باعتباره يبتدء من نقطة الأصل (عندما Z=0) وذلك كطريقة اضافية لتأكيد نقطة (أو نقاط) الحل الأمثل المُتطرفة.

مثال (٢-١٠): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Max. $Z = 8 X_1 + 6 X_2$

Sub. to

$4 X_1 + 2 X_2 \leq 60$

$2 X_1 + 4 X_2 \leq 48$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

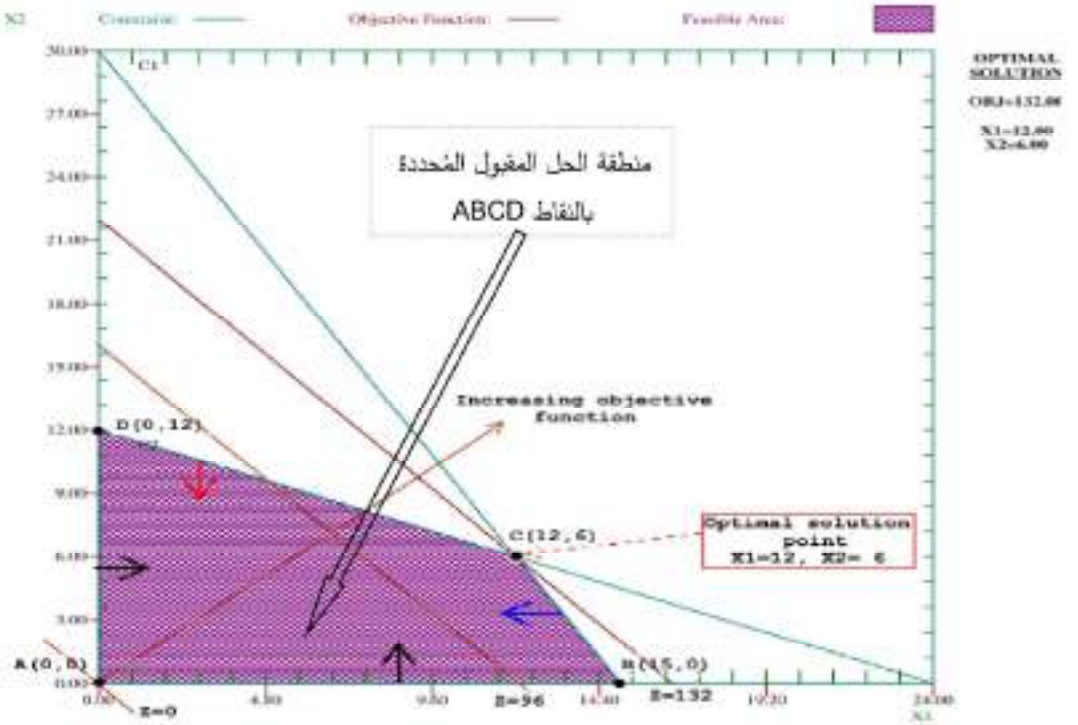
$4 X_1 + 2 X_2 = 60$ ...(1)

X_1	X_2	
0	30	*(0,30)*
15	0	*(15,0)*

$2 X_1 + 4 X_2 = 48$ ...(2)

X_1	X_2	
0	12	*(0,12)*
24	0	*(24,0)*

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1 , X_2 \geq 0$، يتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي.



من الشكل أعلاه نُحدد نقاط الحل الأمثل بالاعتماد على النقاط المُتطرفة كما في الجدول الآتي:

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 8X_1 + 6X_2$
A	(0,0)	0
B	(15,0)	120
C	(12,6)	132
D	(0,12)	72

Max. Z=132

أذن نقطة الحل الأمثل هي C حيثُ $X_2 = 6$, $X_1 = 12$, $Z = 132$ وإن منطقة الحل المقبول المحددة مُعرفة بالنقاط (ABCD).

أما لتحديد الحل الأمثل بالأعتماد على معادلة دالة الهدف Z فيتم ذلك بأفتراض قيم مختلفة لـ(Z) ونرسم دالة الهدف والتي تمتاز بأنها متوازية (وذلك بسبب ثبات قيم

معاملات المتغيرات وتغير قيم دالة الهدف مما يولد خطوط مستقيمة متوازية)، ونستمر حتى نصل إلى أعلى قيمة لدالة الهدف بشرط أن تقع ضمن حدود منطقة الحل المقبول السابق، وبالشكل الآتي:

Let Z = 0 ,

Let $Z=8X_1 + 6X_2=96$

X_1	X_2	
0	16	*(0,16)*
12	0	*(12,0)*

Let $Z=8X_1 + 6X_2= 132$

X_1	X_2	
0	22	*(0,22)*
16.5	0	*(16.5,0)*

بعد رسم دالة الهدف للقيم المُفترضه أعلاه، نُلاحظ أن أعلى نقطة تمر بها دالة الهدف هي النقطة (12,6) C وذلك يؤكد الحل الذي تم الحصول عليه بالأعتماد على النقاط.

مثال (٢-١١): أوجد الحل الأمثل لمثال (٢-٣):

١. بطريقة الرسم.

٢. بطريقة الرسم في حالة أفتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max).

Min. $Z = 2 X_1 + 3 X_2$

Sub to

$X_1 + X_2 \geq 350$

$X_1 \geq 125$

$X_1 + X_2 \leq 600$

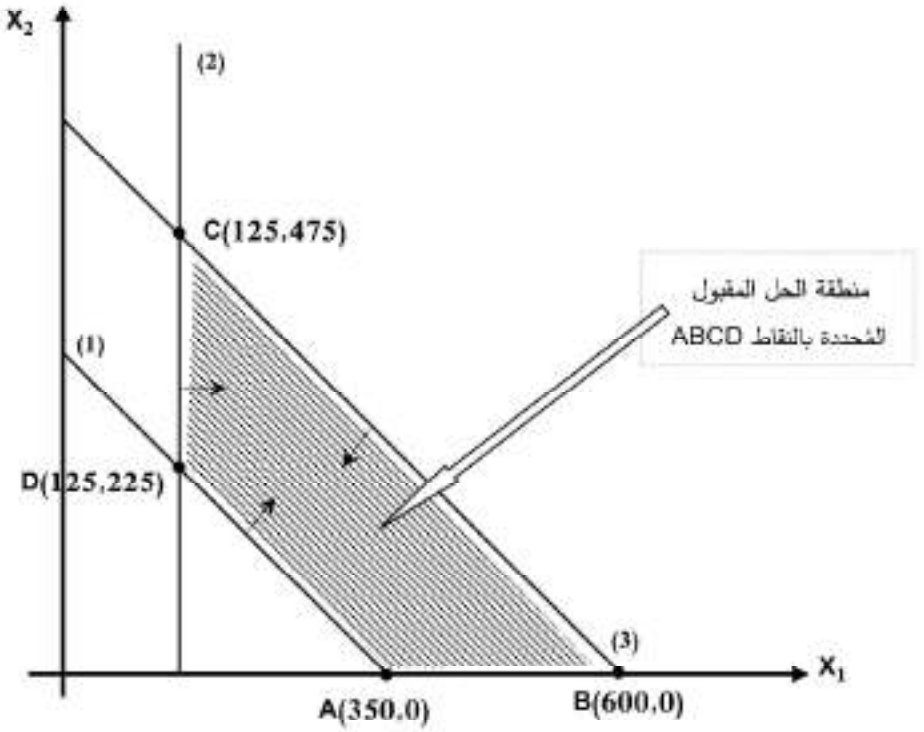
$X_1 , X_2 \geq 0$

١. إيجاد الحل الأمثل بطريقة الرسم:

$X_1 + X_2 = 350$ ...(1) $X_1 = 125$ ...(2) $X_1 + X_2 = 600$ ...(3)

X_1	X_2	
0	350	→ (0,350)
350	0	→ (350,0)

X_1	X_2	
0	600	→ (0,600)
600	0	→ (600,0)



من الرسم أعلاه نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحدده بالنقاط ABCD.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 2 X_1 + 3 X_2$
A	(350,0)	700
B	(600,0)	1200
C	(125,475)	1675
D	(125,225)	925

Min. Z=700

وحيثُ إن دالة الهدف هي تدنية التكاليف إلى أدنى حد، فإن النقطة A تحقق أقل كلفة ممكن، وأن $X_1 = 350$ و $X_2 = 0$ لنحصل على التكلفة الأقل وهو $Z = 700$.

٢. إيجاد الحل الأمثل بطريقة الرسم في حالة افتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max):

بالرجوع إلى نتائج طريقة الرسم في الفرع (١)، وتحت افتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max)، فإننا يُمكن الاستفادة من هذه النتائج واختيار أكبر قيمة لدالة الهدف وهي عند النقطة C حيث أن $X_1 = 125$ و $X_2 = 475$ لنحصل على الربح الأعظم وهو $Z = 1675$.

مثال (٢-١٢): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Max. $Z = 5X_1 + 2X_2$

Sub. to

$X_1 + X_2 \leq 10$

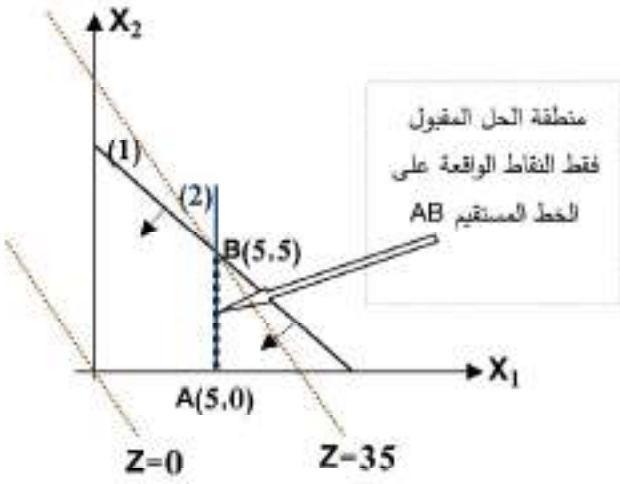
$X_1 = 5$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

$X_1 + X_2 = 10$ ...(1) $X_1 = 5$ ...(2)

X_1	X_2	
0	10	*(0,10)*
10	0	*(10,0)*

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1 , X_2 \geq 0$، ويتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي، حيثُ تحدد نقاط الحل الأمثل بالأعتماد على النقاط المُتطرفة لذلك الشكل، ونُلاحظ أن منطقة الحل الأمثل هي فقط النقاط الواقعة على الخط المستقيم AB والتي تُمثل منطقة تقاطع قيود المسألة، وأن نقطة الحل الأمثل هي النقطة المتطرفة B حيثُ: $X_2 = 5 , X_1 = 5 , Z = 35$



Points	(X_1 , X_2)	$Z=5X_1+2X_2$
A	(5,0)	25
B	(5,5)	35

Max. Z=35

مثال (٢-١٣): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Min. $Z = 10 X_1 + 25 X_2$

Sub. to

$$X_1 + X_2 \geq 50$$
$$X_1 \geq 20$$
$$X_2 \leq 40$$
$$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$$

$X_1 + X_2 = 50$ ...(1)

X_1	X_2	
0	50	*(0,50)*
50	0	*(50,0)*

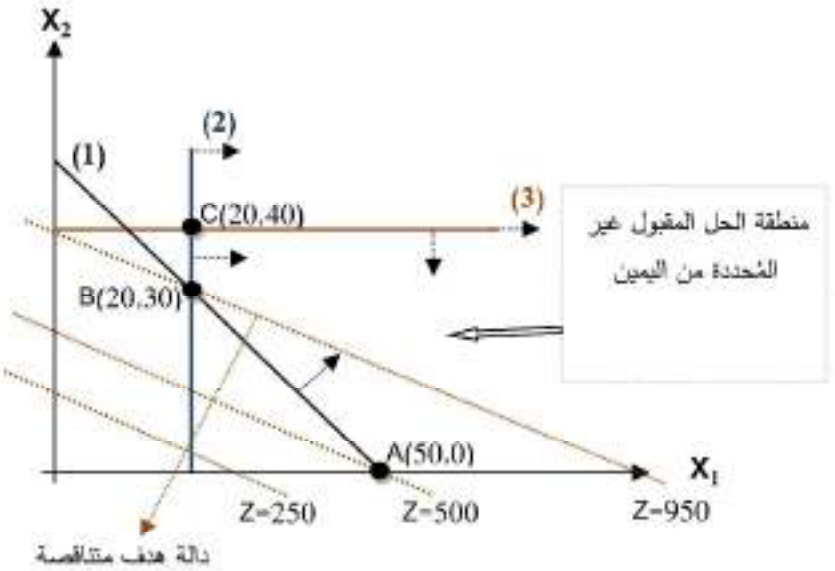
$X_1 = 20$ ...(2)

$X_2 = 40$ ...(3)

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1 , X_2 \geq 0$، ويتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي، حيثُ نُلاحظ أن النقطة A هي نقطة الحل الأمثل لأنها تملك أقل قيمة في منطقة الحل المقبول غير المُحددة X_1ABC وامتداد المستقيم الثالث والمفتوحة من اليمين، حيثُ $Z=500$، $X_1=50, X_2=0$، والحل مُفكك لأن قيمة أحد المتغيرات $X_2 = 0$، وعند رسم معادلة دالة الهدف لقيمة أكبر من $Z = 500$ نجد أنها تقع في المنطقة المفتوح غير المُحددة، أي أن $Z \cong \infty$ هي أكبر قيمة لـ Z لهذا فالحل هنا غير مُحدد.

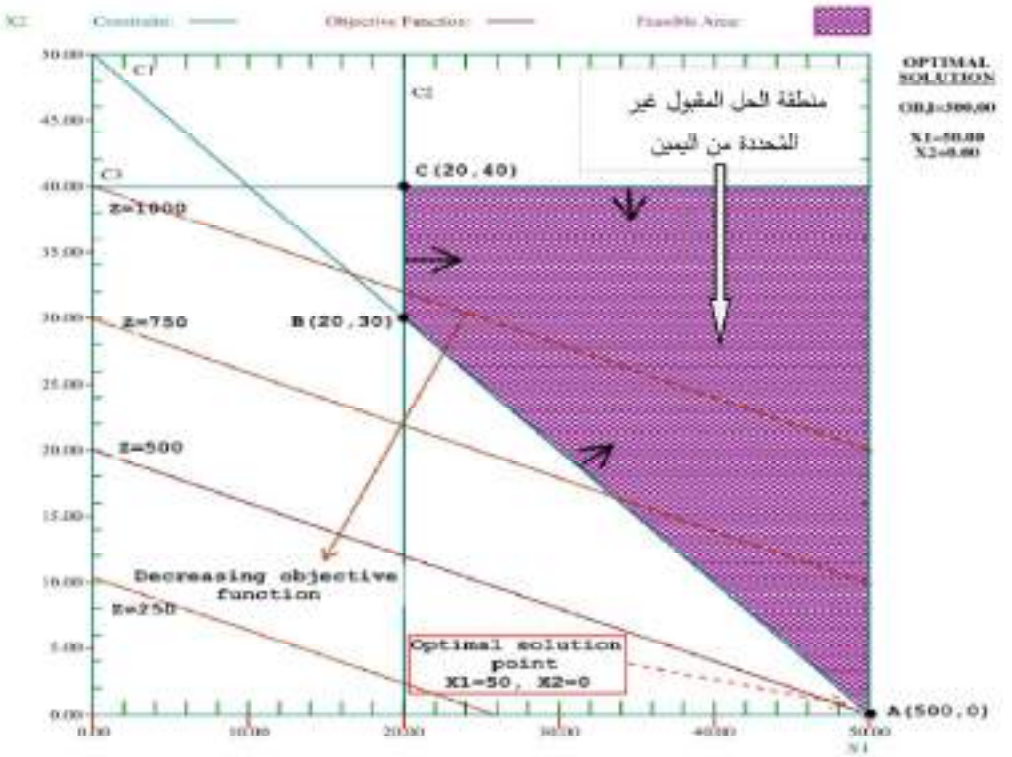
Points	(X_1 , X_2)	$Z = 10X_1 + 25X_2$
A	(50,0)	500
B	(20,30)	950
C	(20,40)	1200

Min. Z=500



Decreasing Objective Function

بالإمكان إجراء بعض التعديلات والإضافات على الشكل أعلاه لتحسين مظهره باستخدام برنامج (Adobe PhotoShop) لكي نتمكن من طباعته بألوان واضحة (لهذا السبب فقط سوف يتم تعديل الرسم أعلاه وإضافة تعليقات توضيحية)، وسيتم الاعتماد على نفس الفكرة مع بعض رسوم الأمثلة والأسئلة الأخرى التي تحتاج إلى توضيح وتعليق أكثر على نتائج الرسم.



مُلاحظة (٢-١٤): إذا كانت Z في حالة تكبير (Max.) في المثال السابق فهي عندها تُعبر عن أرباح أو منفعة فلا يوجد من الناحية العملية أرباحاً أو منفعة لا نهائية، ويُمكن لمثل هذا الأمر أن يقع فقط في المسائل النظرية للبرمجة الخطية.

مثال (٢-١٤): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. to

$-2X_1 + 3X_2 \leq 9$

$3X_1 - 2X_2 \leq -20$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

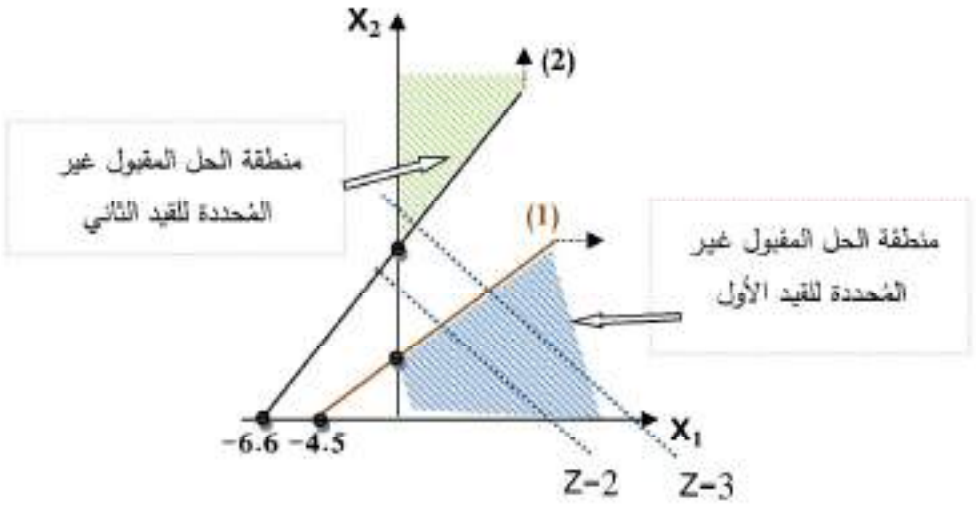
$-2X_1 + 3X_2 = 9$ ...(1)

X_1	X_2	
0	3	*(0,3)*
-4.5	0	*(-4.5,0)*

$3X_1 - 2X_2 = -20$ ...(2)

X_1	X_2	
0	10	*(0,10)*
-6.6	0	*(-6.6,0)*

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1, X_2 \geq 0$ ونلاحظ أنه لا توجد منطقة مُشتركة تحقق جميع القيود، ففضاء منطقة الحل المقبول هو المجموعة الخالية وبالنتيجة لا يوجد أي حل مُمكن للمسألة، وقد يُدعى الحل غير مُعرف (Not Exist Sol.) أو حل غير مقبول (Infeasible Solution)، ويؤكد ذلك مرور دالة الهدف Z في المنطقة الخالية في الربع الأول بين القيدين.



من الناحية النظرية يُمكن لمثل هذا الأمر أن يقع في مسائل البرمجة الخطية، ولكنه غير مُمكن بالنسبة للمسائل التي تُعالج مشاكل حقيقية ويعني آنذاك أن خطأً ما قد حصل في صياغة المُشكلة المطروحة.

مُلاحظة (٢-٥): في حالة تغير القيد الثاني إلى الصيغة $3X_1 - 2X_2 \geq -20$ ، فإن موقع منطقة الحل المقبول لهذهِ الحالة ستكون هي المنطقة غير المُحددة تحت القيد الأول في الربع الأول بسبب تقاطع كلا القيدين في تلك المنطقة.

مثال (٢-١٥): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية لمثال (٢-٧).

الحل: يُمكن أعادة كتابة النموذج الرياضي:

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 9X_2$$

Sub. to

$$5X_1 + 3X_2 \geq 525 \quad ...(1)$$
$$1.25X_1 + 2.5X_2 \leq 600 \quad ...(2)$$
$$X_1 + 1.5X_2 \leq 585 \quad ...(3)$$
$$1.4X_1 + X_2 \leq 315 \quad ...(4)$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$5X_1 + 3X_2 = 525$ ...(1)

X_1	X_2	
0	175	→ (0,175)
105	0	→ (105,0)

$1.25X_1 + 2.5X_2 = 600$ ...(2)

X_1	X_2	
0	240	→ (0,240)
480	0	→ (480,0)

$X_1 + 1.5X_2 = 585$ ...(3)

X_1	X_2	
0	390	→ (0,390)
585	0	→ (585,0)

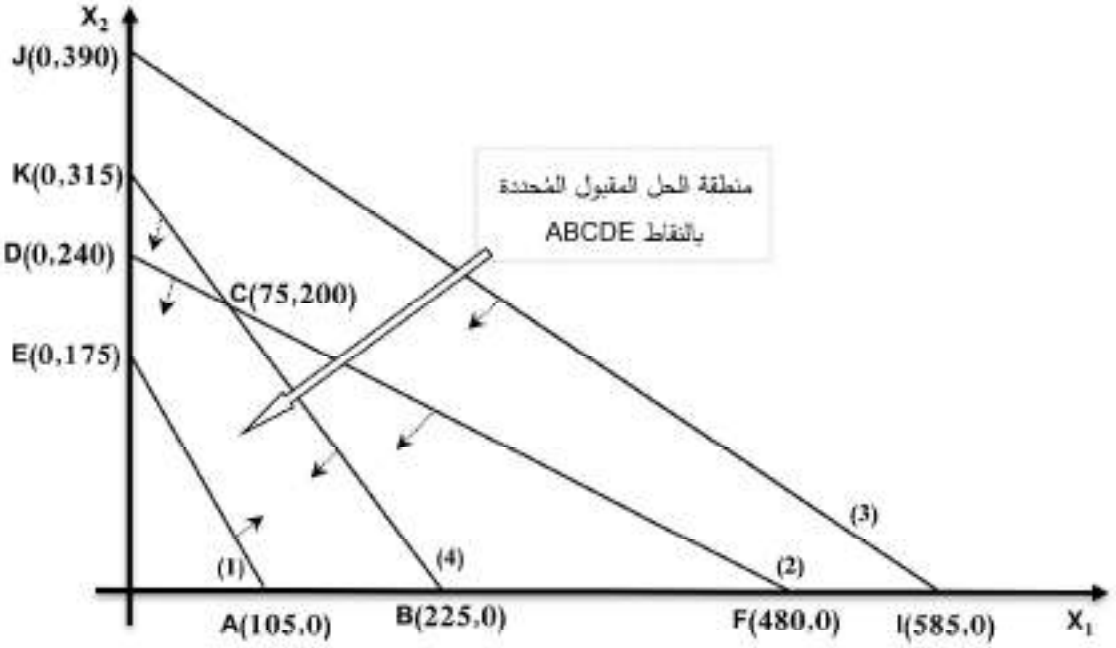
$1.4X_1 + X_2 = 315$ ...(4)

X_1	X_2	
0	315	→ (0,315)
225	0	→ (225,0)

من الرسم التالي نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط ABCDE، وحيثُ إن دالة الهدف هي تعظيم الربح إلى أقصى حد، فإن النقطة C تحقق أقصى ربح ممكن، وأن $X_1 = 75$ و $X_2 = 200$ لنحصل على الربح الأقصى وهو $Z = 2550$ ألف دينار.

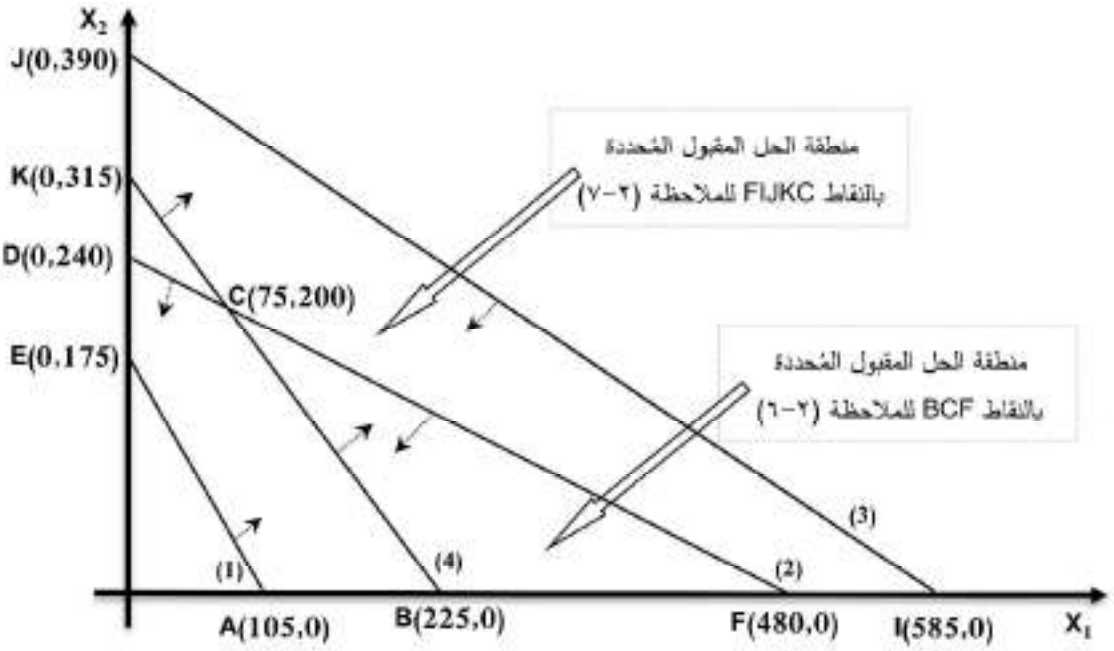
Points	(X_1 , X_2)	$Z = 10 X_1 + 9 X_2$
A	(105,0)	1050
B	(225,0)	2250
C	(75,200)	2550
D	(0,240)	2106
E	(0,175)	1575

Max. Z = 2550



مُلاحظة (٢-٦): في حالة تغيير متباينة القيد الرابع من (≤) إلى (≥) في المسألة الأصلية لهذا السؤال، فإن منطقة الحل المقبول تقع في المنطقة المحددة بالنقاط BCF كما موضح بالشكل التالي.

مُلاحظة (٢-٧): في المُلاحظة (٢-٦)، في حالة تغيير متباينة القيد الثاني من (≤) إلى (≥)، فإن منطقة الحل المقبول تقع في المنطقة المحددة بالنقاط FIJKC كما موضح بالشكل التالي.



مثال (٢-١٦): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية للفرعين الآتيين:

A) Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

Sub. to

$$X_2 + 1 \geq 0$$

$$3X_1 + 4X_2 - 12 \leq 0$$

$$-3 \leq X_1 \leq 3$$

$$2X_1 - 3X_2 \leq 6$$

X_1, X_2 Unrestricted in sign

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الأرباع الأربعة لأن X_1 , X_2 غير مُحددة بإشارة أي يُسمح لنا في هذهِ الحالة الخاصة للعمل في القسم الموجب والسالب من الرسم في الأحداثيين الأفقي والعمودي، ويتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم بعد أن نرسم المُستقيمات المُمثلة لكل قيد وأمدادها ليتقاطعا في الأرباع الأربعة، كذلك نحدد نقاط الحل الأمثل بالأعتماد على النقاط المُتطرفة كما في الشكل التالي:

$X_2 = -1$ ...(1)

$X_1 = 3$ ...(3)

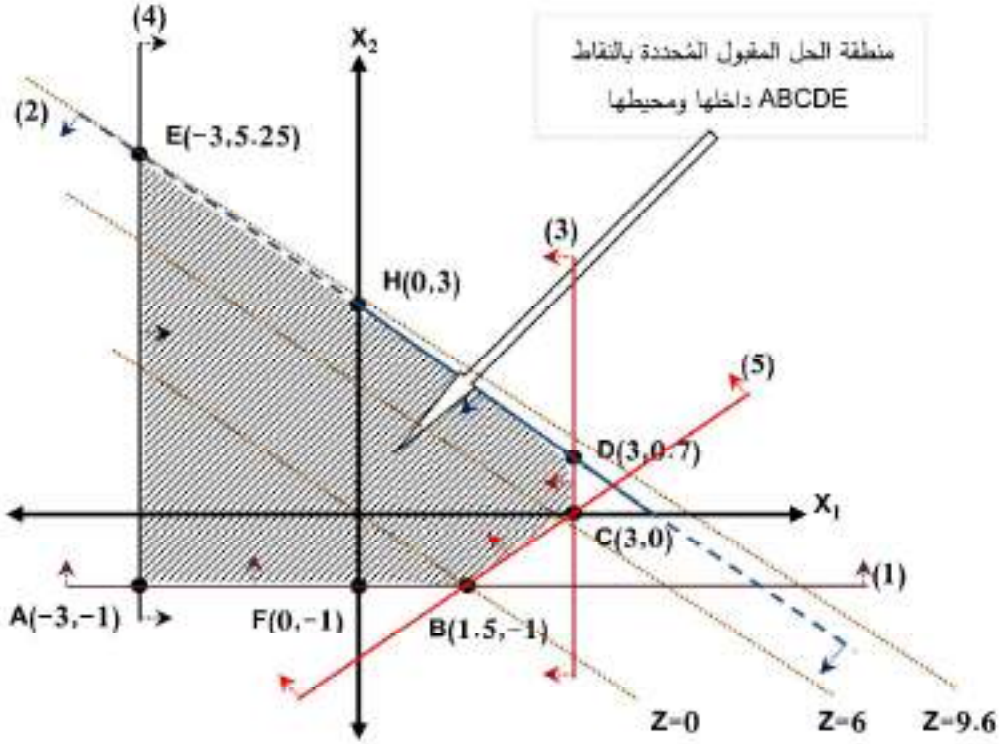
$X_1 = -3$ ...(4)

$3X_1 + 4X_2 = 12$ ...(2)

X_1	X_2	
0	3	*(0,3)*
4	0	*(4,0)*

$2X_1 - 3X_2 = 6$ ...(5)

X_1	X_2	
0	−2	*(0,-2)*
3	0	*(3,0)*



Points	(X_1 , X_2)	$Z = 2X_1 + 3X_2$
A	(−3,−1)	−9
B	(1.5,−1)	0
C	(3,0)	6
D	(3,0.7)	8.1
E	(−3,5.25)	9.75

Max. Z=9.75

نستنتج أن E هي نقطة الحل الامثل لأنها تملك أكبر قيمة في منطقة الحل المقبول المُحددة ABCDE حيثُ $X_2 = 5.25$, $X_1 = -3$ ، $Z = 9.75$، مع مُلاحظة أن قيمة X_1 ظهرت سالبة وهذا مسموح بهِ في هذهِ المسألة الخاصة لأننا نعمل في الأرباع الأربعة.

B) If the non-negative constant change to $X_1 \geq 0$ & X_2 unrestricted in sign, draw that to find the optimal solution?

أوجد الحل الأمثل في حالة أن قيد عدم السالبية قد تغير إلى $X_1 \geq 0$ مع بقاء المتغير الثاني غير محدد بإشارة.

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربعين الأول والثالث لأننا نعمل في الجزء الموجب من X_1، والجزئين الموجب والسالب من X_2، وبالاعتماد على رسم فرع (A) السابق نجد أن منطقة الحل المقبول لهذهِ الحالة مُحددة بالنقاط BCDHF، ونستخرج أعظم قيمة من الجدول التالي، حيثُ نُلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي H حيثُ $Z=9, X_1=0, X_2=3$ وأن الحل مُفكك لأن قيمة أحد المتغيرات $X_1 = 0$.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 2X_1 + 3X_2$
B	(1.5,−1)	0
C	(3,0)	6
D	(3,0.7)	8.1
F	(0,−1)	−3
H	(0,3)	9 ⇐ Max. Z=9

مثال (٢-١٧): إفترض أن إحدى الشركات تنتج إحدى السلع التي يجب أن تزن على الأقل 150 كغم ويستخدم في صناعتها مادتين خام، المادة X_1 تكلفتها 2 ألف دينار للوحدة والمادة X_2 تكلفتها 8 ألف دينار للوحدة، ولانتاج وحدة واحدة من المنتج النهائي فلا بد من استخدام 20 وحدة من X_1 على الأكثر و14 وحدة من X_2 على الأقل. فإذا علمت أن كل وحدة من X_1 و X_2 تزن 5 و 10 كغم على التوالي. المطلوب تحديد الكمية الواجب استخدامها من الخامتين لكل وحدة من المنتج النهائي لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن مستخدماً طريقة الرسم لإجراء ذلك.

الحل: يُمكن صياغة المشكلة في شكل برنامج خطي كما يلي:

الهدف: هو تخفيض التكاليف Minimize $X_0 = 2X_1 + 8X_2$ إلى أدنى حد مُمكن.

القيود: يُمكن تلخيصها بالشكل الآتي:

- ✓ القيد الأول يعبر عن الوزن النهائي للمنتج وهو 150 كغم ويُمكن التعبير عنه رياضياً كالآتي: $5X_1 + 10X_2 \geq 150$.
- ✓ القيد الثاني يعبر عن عدد الوحدات الواجب استخدامها من المادة X_1 وهي 20 وحدة على الأكثر، وهذا يعني أن الكمية المستخدمة يجب أن تكون أقل من أو تساوي 20 وحدة: $X_1 \leq 20$.
- ✓ القيد الثالث يعبر عن عدد الوحدات الواجب استخدامها من المادة X_2 وهي 14 وحدة على الأقل، وهذا يعني أن الكمية المستخدمة من هذه المادة يجب أن تكون أكثر من أو تساوي 14 وحدة: $X_2 \geq 14$.
- ✓ قيود عدم السلبية وهي: $X_1, X_2 \geq 0$.

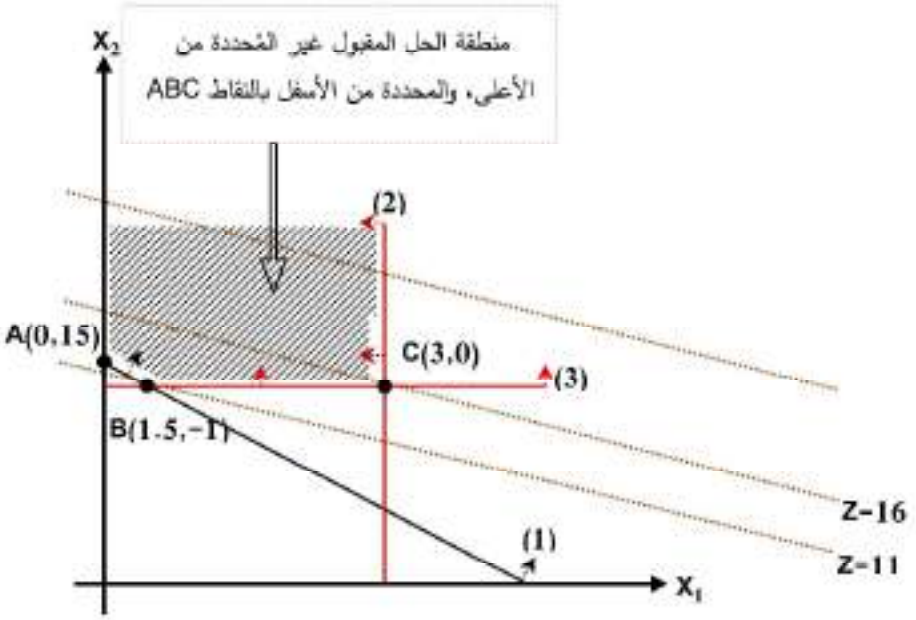
يتم تحديد إحداثيات كل قيد كما يأتي:

$5X_1 + 10X_2 - 150 \ldots(1)$

X_1	X_2	
0	15	*(0,15)*
30	0	*(30,0)*

$X_1 = 20 \ldots(2)$

$X_2 - 14 \ldots(3)$



من الرسم أعلاه نجد أن منطقة الحل الممكنة هي المنطقة المظللة المفتوحة غير المحددة من الأعلى بقيد، أما النقاط التي يُمكن أختبارها مع دالة الهدف فهي النقاط A وB وC.

Points	(X_1 , X_2)	$X_0 = 2X_1 + 8X_2$
A	(0, 15)	120
B	(2, 14)	116
C	(20 , 14)	152

Min. Z = 116

وحيثُ إن دالة الهدف هي تصغير التكاليف إلى أدنى حد، فإن النقطة B تحقق أقل تكلفة ممكنة، وهي تعني أنهُ لتصغير التكاليف إلى أدنى حد ممكن فيجب استخدام وحدتين من المادة الخام X_1 واستخدام 14 وحدة من المادة الخام X_2، وهذا ما نلاحظة عند رسم دالة الهدف.

Let $Z=2X_1+8X_2=116$

X_1	X_2	
0	14.5	→ *(0,14.5)*
58	0	→ *(58,0)*

Let $Z=2X_1+8X_2=160$

X_1	X_2	
0	20	→ *(0,20)*
80	0	→ *(80,0)*

مُلاحظة (٢-٨): إذا كانت Z في حالة تكبير (Max.) في المثال السابق عندها سيكون الحل غير محدد بسبب أن منطقة الحل الامثل غير محدد من الأعلى، فهي تُعبر عن أرباح أو منفعة فلا يوجد من الناحية العملية أرباحاً أو منفعة لا نهائية، ويُمكن لمثل هذا الأمر أن يقع فقط في المسائل النظرية للبرمجة الخطية.

٢-٨ الطريقة العامة لتحليل مسائل البرمجة الخطية

General Form for L.P.P. Analysis

لقد تم الإشارة سابقاً إلى أن الطريقة البيانية (طريقة الرسم) يُمكن استخدامها لحل مسائل البرمجة الخطية بمتغيرين، ومع أنه من الناحية النظرية يُمكن استخدامها لحل مسائل البرمجة الخطية بثلاث متغيرات، إلا إنهُ من الصعب إجراء ذلك عملياً بسبب التعامل مع الأشكال الهندسية ثلاثية الإبعاد في الفضاء الأقليدي، كذلك فإن كثيراً من مسائل البرمجة الخطية في الواقع العملي تتضمن عدداً كبيراً من المتغيرات مما يجعل

الطريقة البيانية عاجزة عن التعامل مع هذهِ المسائل، لذلك تعتبر الطريقة العامة (المُبسطة) أو (السمبلكس Simplex Method) طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في إيجاد الحل لمسائل البرمجة الخطية بأي عدد من المتغيرات.

لقد طورت هذهِ الطريقة من قبل عالم الرياضيات الأمريكي جورج دانتبرج عام 1947م، وتعتمد هذهِ الطريقة أساساً على نظرية النقطة المُتطرفة (الحدية) (Extreme Point)، وتستخدم خوارزمية تكرارية (Iterative Algorithm) نستطيع بموجبها أن نُحسن قيمة دالة الهدف بالتدريج من خلال الانتقال من نقطة مُتطرفة إلى أخرى مُجاورة لها حتى يتم الوصول للنقطة التي يتعذر بعدها تحسين قيمة دالة الهدف[1].

٢-٨-١ طريقة السمبلكس المبسطة Simplex Method

تستنبط هذهِ الطريقة في مبدأها على الابتداء بحل ابتدائي مُعين مقبول يجعل المتغيرات الوهمية (S_i) كمتغيرات أساسية عند أحد النقاط المُتطرفة (عادة نقطة الأصل)، بشرط أن تكون مصفوفة معاملاتها أحادية ((Identity Matrix (I)) وجعل المتغيرات الأصلية كمتغيرات غير أساسية، أي ($X_j = 0$)، ثم نستمر بأسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل إلى أن نحصل بعد عدد مُعين من الخطوات على الحل الأمثل. نحتاج هنا إن يكون هناك دوماً وفي كل مرحلة على الأقل m من المتغيرات الموجبة $X_j \geq 0$، حيثُ m تُمثل عدد قيود المسألة، وبخلافه يكون الحل مُفككاً[2] [3].

---

(١) الناتب، إبراهيم، وباقية، أنعام، (١٩٩٠)، **بحوث العمليات – خوارزميات وبرامج حاسوبية**، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، ص ٤٠.

(٢) الصفدي، محمد سالم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٤٥.

(3) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 90.

مما تتميز بهِ طريقة السمبلكس هو أن عدد التكرارات اللازمة لحل أي برنامج خطي هو عدد مُنتهِ (Finite)، ويرجع ذلك إلى أن عدد القيود في أي برنامج خطي هو عدد مُنتهِ مما ينتج عنهُ أن عدد النقاط المُتطرفة يتم تحديدها بتقاطع أثنين أو أكثر من هذهِ القيود، وخطوات هذه الطريقة تتلخص بالآتي:

١. كتابة المسألة بالصيغة القياسية.

٢. وضع المسألة القياسية بشكلها العام كما موضح في جدول (٢-٢) الآتي:

All / B.V.	متغيرات دالة الهدف	Right Hand Side (RHS)
المتغيرات الأساسية	معاملات المتغيرات في القيود	قيم المتغيرات الأساسية
متغير دالة الهدف Z	معاملات متغيرات دالة الهدف	قيمة دالة الهدف Z

جدول (٢-٢) يوضح الشكل العام لجداول الحل بطريقة السمبلكس المبسطة

يتم تكوين جدول الحل الأولي بالترتيب الآتي:

- العمود الأول ويسمى عمود المتغيرات الأساسية ((Basic Variables (BV)) وهي جميع المتغيرات الوهمية (سواء كانت متغيرات مساعدة أو متغيرات صناعية) التي تم إضافتها لقيود المسألة عند تحويلها للصيغة القياسية والتي نبدأ بها الحل، وفي الجزء الأسفل لهذا العمود يتم وضع رمز متغير دالة الهدف وعادةً نستخدم الرمز (Z).

- العمود الثاني يتضمن في جزءهِ الأعلى جميع رموز متغيرات دالة الهدف (All Variables)، ونضع معاملاتها الموجودة في القيود في الجزء الأوسط كلاً في مكانهِ، أما في الجزء الأسفل فنضع معاملات متغيرات دالة الهدف.
- عمود معاملات الجانب الأيمن ((Right Hand Side (RHS) لجميع قيود المسألة إضافة إلى قيمة دالة الهدف (المساوية للصفر في الحالة الاعتيادية).
- عمود النسبة (Ratio) وهو العمود الأخير (يتم اعداده خلال مراحل الحل).
- يدعى الصف الأخير من الجدول (٢-٢) بصف معاملات دالة الهدف أو صف (Z).

٣. نحدد العمود الرئيسي (Pivot Column) وهو صاحب أكبر رقم سالب من صف (Z) وهو يعني دخول متغير هذا العمود الحل، ويسمى المتغير الداخل ((Entering Variable (EV).

٤. نحدد الصف الرئيسي (Pivot Row) الذي يُمثل المتغير الخارج (Leaving Variable (LV)) وهو يقابل أصغر رقم موجب في عمود النسبة (Ratio)، والذي يتم حسابهُ وفق المعادلة:

$$\text{Ratio} = \frac{\text{RHS Column}}{\text{Pivot Column}}$$

أي حاصل قسمة معاملات عمود (RHS) على معاملات العمود الرئيسي الداخل (باستثناء قيمة دالة الهدف Z).

٥. يتم وضع رمز المتغير الداخل في عمود (BV) محل رمز المتغير الخارج، ويتم تعديل قيم معاملات الصف الرئيسي الجديد (الداخل) وفق المعادلة:

معاملات الصف الرئيسي الجديد = معاملات الصف الرئيسي القديم ÷ العنصر المحوري (جاء من تقاطع الصف الرئيسي مع العمود الرئيسي)

Modification of main New = Old Pivot row ÷ Pivot number

معادلة تعديل باقي الصفوف = معاملات أي صف قديم (صف غير رئيسي) – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي × معاملات الصف الرئيسي الجديد

$$\begin{pmatrix}\text{Modification}\\ \text{New row}\end{pmatrix} = (\text{Old row}) - \begin{pmatrix}\text{Pivot column}\\ \text{coefficient}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\text{New pivot}\\ \text{row}\end{pmatrix}$$

٦. عند هذهِ المرحلة يتم تكوين الجدول الجديد، وللحكم على أن الجدول الأخير هو جدول الحل الأمثل من عدمهِ نطبق الشروط الآتية:

- إذا كانت دالة الهدف من نوع (.Max) فيجب أن تكون جميع قيم صف (Z) أما صفر أو موجبة، وإذا كان هنالك على الأقل قيمة واحدة سالبة فإن الحل غير أمثل، لذا يتم البحث عن حل مقبول جديد يحقق هذا الشرط، ويتم ذلك بجعل أحد المتغيرات غير الأساسية كمتغير أساسي ويتم اختيار المتغير الداخل (EV) الذي يناظر أكبر رقم سالب في صف (Z)، ولتحديد المتغير الخارج (LV) يتم قسمة عناصر العمود (RHS) على معاملات المتغير الداخل الأكبر من صفر فقط، واختيار النسبة (Ratio) الأصغر.
- إذا كانت دالة الهدف من نوع (.Min) فيجب أن تكون جميع قيم صف (Z) أما صفر أو سالبة، وإذا كان هنالك على الأقل قيمة واحدة موجبة فإن الحل غير أمثل، لذا يتم البحث عن حل مقبول جديد، إذ يتم اختيار المتغير الذي يناظر أكبر رقم موجب في صف (Z) واعتباره كمتغير داخل، أما المتغير الخارج فيتم اختياره بنفس الطريقة المستخدمة في حالة (.Max).

٧. تكرار الخطوات من (٣) إلى (٦) حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

مثال (٢-١٨): أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex).

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. to

$$-X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 14$$
$$X_1 - X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نحول المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية، ثم نعمل على ترتيبها لتكون جاهزة للوضع في جدول الحل الأساسي المقبول الأول:

Max. $Z + 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Sub. to

$$-X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 14$$
$$X_1 - X_2 + S_3 = 3$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$-X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 14$$
$$X_1 - X_2 + S_3 = 3$$
$$Z - 3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

بعد تحويل المسألة إلى النموذج القياسي، نضع جميع معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في جدول السمبلكس ونحدد المتغير الداخل الذي يُعطي أفضل تحسين لقيمة دالة الهدف ويملك أكبر قيمة سالبة في صف Z وهو X_1 ومعامله (-3)، ونُحدد المتغير الخارج الذي يملك أقل نسبة حاصل قسمة (Ratio - 3) وهو S_3، فإذا لم نجد مثل هذا المتغير (جميع قيم صف Z أصفار أو موجبة) كان الحل الذي وصلنا إليه حلاً أمثلياً (هذا هو معيار التوقف في التكرار أو الأستمرار).

إن المُتغير الأساسي هو المُتغير الذي مُعاملهُ (+1) في معادلة وأصفار في بقية المعادلات (القيود ودالة الهدف)، ونُميز المتغيرات الأساسية في الحل الحالي بأنها تلك المتغيرات المكتوبة في العمود الأول (Basic Variables) وهي S_1, S_2, S_3، وقيمها تظهر في عمود الحل (RHS)، وكل متغير لا يظهر في عمود المتغيرات الأساسية يُعتبر غير أساسي (Non-Basic Var) في الحل الحالي وهي X_1, X_2.

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	-1	2	1	0	0	4	يهمل
S_2	3	2	0	1	0	14	14/3=4.67
S_3	1	-1	0	0	1	3	3/1=3
Z	-3	-2	0	0	0	0	

المتغير الداخل، المتغير الخارج، العمود المحوري، العنصر المحوري، الصف المحوري، أقل حاصل قسمة

مُلاحظة (٢-٩): نكتب العبارة يهمل في عمود (Ratio) عندما يتم تقسيم قيم عمود (RHS) على قيمة سالبة (أو صفرية) في عمود المتغير الداخل، حيث لا يصح التقسيم على السالب (أو الصفر) ولهذا نكتب يهمل مقابل تلك القيمة ولا تُأخذ بالحسبان عند تحديد المتغير الخارج، وكما تم مُلاحظة ذلك في الجدول الأول والثاني من الحل.

إن جدول الحل الأساسي المقبول الأول يوضح عملية أختيار نقطة الأصل كحل ابتدائي والتي نحصل عليها بإعطاء جميع متغيرات القرار الأصلية (وهي متغيرات النموذج

الأصلي قبل كتابته بالشكل القياسي) في النموذج القيمة صفر، حيثُ نبدء بالحل X_1-X_2-0 هو حل أساسي يجعل قيمة دالة الهدف في الجدول الأولي هي Z-0 وقيم المتغيرات الأساسية هي S_1-4 و S_2-14 و S_3-3، ونكمل إجراء العمليات المحورية ليتكون لدينا جدول الحل الأساسي المقبول الثاني التالي.

يُمكن توضيح مجمل العمليات المحورية اللازمة للإنتقال من الجدول الأول إلى الثاني بالشكل الآتي:

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_3 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

معاملات الصف الرئيسي الجديد (الصف أو القيد الثالث) = معاملات الصف الرئيسي القديم ÷ العنصر المحوري

New Row3 (R_3) = Old R_3 ÷ Pivot no. ➔ New R_3 = Old R_3 ÷ 1

$$= \frac{1}{1} \quad \frac{-1}{1} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{1}$$

= 1 −1 0 0 1 3 ➔ عناصر الصف الثالث الجديد

- معادلات تعديل باقي الصفوف (الصف الأول يُمثل المتغير S_1 والصف الثاني يُمثل المتغير S_2):

✓ معاملات الصف الأول الجديد = معاملات الصف الأول القديم S_1 – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي وهو (−1) × معاملات الصف الرئيسي الجديد R_3

New R_1 = Old R_1 – (−1) × New R_3 ➔ New R_1 = Old R_1 + New R_3

➔ Old R_1 = −1 2 1 0 0 4

New R_3 = 1 −1 0 0 1 3

\+ ----------

New R_1 = 0 1 1 0 1 7 صف١ الجديد في الجدول الثاني

✓ معاملات الصف الثاني الجديد = معاملات الصف الثاني القديم S_2 – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي وهو (3) × معاملات الصف الرئيسي الجديد R_3

New R_2 = Old R_2 – 3 × New R_3

➔ Old R_2 =	3	2	0	1	0	14
−3×New R_3 =	−3	3	0	0	−3	−9
+						
New R_2 =	0	5	0	1	−3	5

صف٢ الجديد في الجدول الثاني

✓ معاملات صف Z الجديد = معاملات الصف الرابع القديم Z – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي وهو (−3) × معاملات الصف الرئيسي الجديد R_3

New R_4 = Old R_4 – (−3) × New R_3 ➔ New R_4 = Old R_4 + 3×New R_3

➔ Old R_4 =	−3	−2	0	0	0	0
3×New R_3 =	3	−3	0	0	3	9
+						
New R_4 =	0	−5	0	0	3	9

صف٤ الجديد في الجدول الثاني

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2 ↓	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	1	1	0	1	7	7
← S_2	0	5	0	1	−3	5	(1)
X_1	1	−1	0	0	1	3	يهمل
Z	0	−5	0	0	3	9	

إن قيمة دالة الهدف Z = 9 وقيم المتغيرات الأساسية S_1=7 و S_2=5 و X_1=3 أما قيم المتغيرات غير الأساسية هي S_3=0 و X_2=0، ونكمل العمليات المحورية ليتكون لدينا جدول الحل الأساسي المقبول الثالث التالي بسبب وجود قيم سالبة في صف Z وهذا يدل على إمكانية تحسين قيمة Z ب 5 وحدات نقدية لكل قيمة جديدة إلى X_2، ونحدد المتغير الداخل الذي يملك أكبر قيمة سالبة في صف Z وهو X_2 ومعامله (5-)، ونحدد المتغير الخارج الذي يملك أقل نسبة حاصل قسمة (Ratio-1) وهو S_2.

أما العمليات المحورية اللازمة للانتقال من الجدول الثاني إلى الثالث فهي بالشكل التالي:

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

New R_2 = Old R_2 ÷ 5 (Pivot no.)

$= \frac{0}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{0}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad \frac{5}{5}$

$= 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad 1$ ← عناصر الصف الثاني الجديد

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

New R_1 = Old R_1 – 1 × New R_2

→ Old R_1 = 0 1 1 0 1 7

– New R_2 = 0 −1 0 $\frac{-1}{5}$ $\frac{3}{5}$ −1

\+ ----------

New R_1 = 0 0 1 $\frac{-1}{5}$ $\frac{0}{5}$ 6 صف١ الجديد في الجدول الثالث

New R_3 = Old R_3 – (−1) × New R_2 ➔ New R_3 = Old R_3 + New R_2

➔ Old R_3 =	1	−1	0	0	1	3
New R_2 =	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1
+						
New R_3 =	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4

صف٣ الجديد في الجدول الثالث

New R_4 = Old R_4 – (−5) × New R_2 ➔ New R_4 = Old R_4 + 5×New R_2

➔ Old R_4 =	0	−5	0	0	3	9
5×New R_2 =	0	5	0	1	−3	5
+						
New R_4 =	0	0	0	1	0	14

صف٤ الجديد في الجدول الثالث

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث (الأمثل)

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
S_1	0	0	1	−1/5	8/5	6
X_2	0	1	0	1/5	−3/5	1
X_1	1	0	0	1/5	2/5	4
Z	0	0	0	1	0	14

من الجدول الثالث أعلاه نُلاحظ أن جميع قيم صف Z موجبة أو صفرية وهذا دليل على وصولنا للحل الأمثل وليس هناك تحسن يرجى من الاستمرار بالحل، لهذا يدعى جدول الحل الأساسي المقبول الثالث بجدول الحل الأمثل، وأن الحل الأمثل هو (Max. Z=14) وأن قيم متغيرات القرار تساوي X_1=4 و X_2=1 وهناك فائض لم يُستغل في القيد الأول مقدارة S_1=6.

مثال (٢-١٩): أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة العامة (Simplex).

Min. $Z = -5X_1 - 3X_2 + 2X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 \le 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 15$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل:

Min. $Z = -5X_1 - 3X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$
$$Z + 5X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	1	0	0	5	5/1=5
S_2	1	−2	−2	0	1	0	4	4/1=4
S_3	3	3	2	0	0	1	15	15/3=5
Z	5	3	−2	0	0	0	0	

أن الحل الأساسي المقبول للجدول الأولي هو $Z=0, S_1=5, S_2=4, S_3=15, X_1=0, X_2=0, X_3=0$ ولأنه هنالك قيم موجبة في صف Z لهذا نختار أكبر رقم موجب ليصبح متغيرة هو المتغير الداخل وهو X_1 (يقابل أكبر رقم موجب في صف Z وهو 5)، وذلك لأن دالة الهدف من نوع Min والخارج S_2 (يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 4) ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

$$\text{New } R_2 = \text{Old } R_2 \div 1$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New } R_1 = \text{Old } R_1 - 1 \times \text{New } R_2$$

$$\text{New } R_3 = \text{Old } R_3 - 3 \times \text{New } R_2$$

$$\text{New } R_4 = \text{Old } R_4 - 5 \times \text{New } R_2$$

➔ Old R_4 =	5	3	−12	0	0	0	0
−5×New R_2 =	−5	10	10	0	−5	0	−20
+							
New R_4 =	0	13	8	0	−5	0	−20

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	3	3	1	−1	0	1	1/3
X_1	1	−2	−2	0	1	0	4	يهمل
S_3	0	9	8	0	−3	1	3	1/3
Z	0	13	8	0	−5	0	−20	

أن الحل الأساسي المقبول للجدول الثاني هو $Z=-20, S_1=1, X_1=4, S_3=3, X_2=0, X_3=0, S_2=0$ ولأنه هنالك قيم موجبة في صف Z لهذا نختار أكبر رقم موجب ليصبح متغيرة هو المتغير الداخل وهو X_2 (يقابل أكبر رقم موجب في صف Z وهو 13) والخارج S_1 (يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 1/3) ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثالث.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_1 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

$$\text{New } R_1 = \text{Old } R_1 \div 3$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New } R_2 = \text{Old } R_2 - (-2) \times \text{New } R_1$$

$$\text{New } R_3 = \text{Old } R_3 - 9 \times \text{New } R_1$$

$$\text{New } R_4 = \text{Old } R_4 - 13 \times \text{New } R_1$$

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث (الأمثل)

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
X_2	0	1	1	1/3	−1/3	0	1/3
X_1	1	0	0	2/3	1/3	0	14/3
S_3	0	0	−1	−3	0	1	0
Z	0	0	−5	−13/3	−2/3	0	−73/3

من الجدول الثالث أعلاه نُلاحظ أن جميع قيم صف Z سالبة أو صفرية وهذا دليل على الوصول للحل الأمثل وليس هناك تحسن يرجى من الاستمرار بالحل، وأن الحل الأمثل هو (Min. Z= −73/3 = −24.33) وأن قيم متغيرات القرار تساوي X_1=14/3= 4.67 و X_2= 1/3= 0.33 و S_3=0.

مُلاحظة (٢−١٠): عندما تتساوى قيم حاصل القسمة في عمود (Ratio) لتحديد المتغير الخارج، فإن ذلك سيجعل قيمة المتغير (الذي لم يخرج) في عمود (RHS) مساوية للصفر في الجدول اللاحق لهذه الخطوة، وهذا ما شاهدناه في جدول الحل الأمثل للمتغير الأساسي S_3=0.

مُلاحظة (٢−١١): تستخدم المتغيرات الصناعية (Artificial Variables) في حالة وجود على الأقل قيد واحد في المسألة بشكل (≥) أو (=)، وذلك لتحقيق شرط الابتداء بالحل وهو توفر المصفوفة الأحادية كشرط للحل الأساسي الأولي المقبول، إذ تضاف هذه

المتغيرات إلى القيود من هذا النوع ويرمز لهذه المتغيرات بـ R_i ، حيثُ $R_i \geq 0$ وتعامل مثل ما تم معاملة المتغيرات الوهمية.

يوجد أسلوبان لحل مسائل البرمجة الخطية من هذا النوع هي:

أ) أسلوب M الكبيرة Big M-Technique

ب) طريقة السمبلكس ذات المرحلتين Two-Phase Simplex Method

٢-٨-٢ أسلوب M الكبيرة Big-M Technique

يتم بهذا الاسلوب إضافة المتغيرات الاصطناعية R_i إلى القيود من نوع (≥) أو (=)، ثم تضاف هذه المتغيرات إلى دالة الهدف بمعامل (M-) إذا كانت دالة الهدف Max. وبمعامل (M+) إذا كانت Min.، إذ أن (M) يمثل عدد موجب كبير جداً وقد يدعى بكلف الجزاء (Penalty Cost) حيث ($M \to \infty$)، ولهذا السبب قد يسمى هذا الأسلوب باسلوب الجزاء[1].

مثال (٢-٢٠): أوجد الحل الأمثل باسلوب (Big-M) لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

Max. $Z = 5X_1 + 2X_2$

Sub. to

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 = 5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية والإصطناعية:

(1) Ibid, p. 104.

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 2X_2 + 0S_1 - MR_2 \quad \rightarrow \quad Z - 5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + MR_2 = 0$$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + S_1 = 10$$

$$X_1 + R_2 = 5$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , R_2 \geq 0$$

إن من شروط الصيغة القياسية أن يكون كل متغير أساسي معامله (+1) في معادلة وأصفار في بقية المعادلات، هذا الامر متحقق مع المتغير (S_1) حيث معامله (+1) في القيد الأول ومعاملاته أصفار في دالة الهدف والقيد الثاني، أما المتغير (R_2) فمعامله (+1) في القيد الثاني وصفر في القيد الأول أما في دالة الهدف فمعامله (+M)، ولجعل القيمة الأخيرة صفراً فيتم ضرب القيد الثاني بالقيمة (−M) ونجمع هذا القيد مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$Z - 5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + MR_2 = 0$$

$$- MX_1 \qquad\qquad - MR_2 = -5M$$

$$Z + (-M-5) X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0R_2 = -5M$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	0	10	10
R_2	1	0	0	1	5	5
Z	−M−5	−2	0	0	−5M	

المتغير الداخل للحل هو X_1 الذي يقابل أكبر قيمة سالبة إلى M في صف Z وهي (−M−5) لأن دالة الهدف من نوع .Max، والخارج R_2 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 5، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 \div 1$$

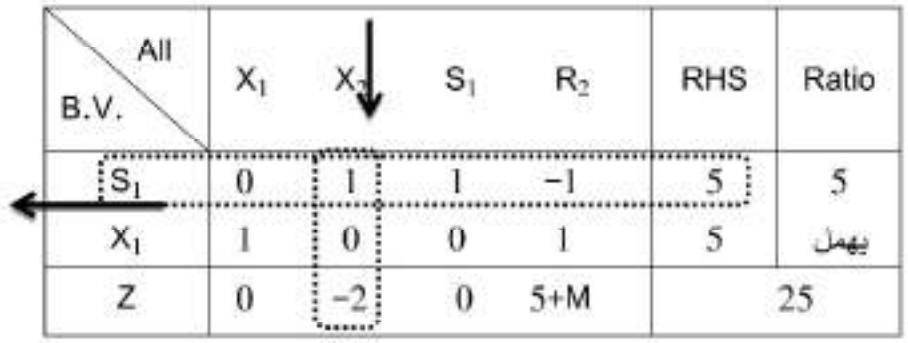
- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 - 1 \times \text{New Row}_2$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - (-M-5) \times \text{New Row}_2$$

➔ Old Row_3 =	−M−5	−2	0	0	−5M
(M+5)×New Row_2 −	M+5	0	0	M+5	5M+25
+					
New Row_3 =	0	−2	0	M+5	25

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني



All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS	Ratio
S_1	0	1	1	−1	5	5
X_1	1	0	0	1	5	يهمل
Z	0	−2	0	5+M	25	

جدول الحل الأساسي المقبول الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS
X_2	0	1	1	−1	5
X_1	1	0	0	1	5
Z	0	0	2	3+M	35

نتوقف لأن جميع قيم صف Z موجبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل هو $X_2=5$, $X_1=5$ و Max. Z=35 .

مُلاحظة (٢-١٢): يجب أن تكون قيمة R_i مساوية للصفر في جدول الحل الأمثل، أما إذا كانت قيمتها موجبة فإن الحل غير مقبول.

مثال (٢-٢١): أوجد الحل الأمثل باسلوب Big-M لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

Min. $Z = 4X_1 + X_2$

Sub. to

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

Min. $Z = 4X_1 + X_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$

$\rightarrow Z - 4X_1 - X_2 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_2 = 0$

Sub. to

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 , R_1, R_2 \geq 0$$

نلاحظ إن شروط الصيغة القياسية غير متحققة مع المتغيرين الأساسيين R_1 و R_2 لأن معاملاتهما في دالة الهدف هي (M-) وليست صفر، ولكي نجعلها صفراً يتم ضرب القيد الأول والثاني بالقيمة (M+) ونجمعهما مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$Z - 4X_1 - X_2 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_2 = 0$$
$$3MX_1 + MX_2 + MR_1 = 3M$$
$$4MX_1 + 3MX_2 - MS_2 + MR_2 = 6M$$

$$Z + (7M-4)X_1 + (4M-1)X_2 - MS_2 + 0S_3 + 0R_1 + 0R_2 = 9M$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
R_1	3	1	0	0	1	0	3	1
R_2	4	3	−1	0	0	1	6	3/2
S_3	1	2	0	1	0	0	4	3
Z	7M−4	4M−1	−M	0	0	0	9M	

المتغير الداخل للحل هو X_1 الذي يقابل أكبر قيمة موجبة إلى M في صف Z وهي (7M−4) لأن دالة الهدف من نوع .Min، والخارج R_1 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 1، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_1 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 \div 3$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 - 4 \times \text{New Row}_1$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - 1 \times \text{New Row}_1$$

$$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - (7M-4) \times \text{New Row}_1$$

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2 ↓	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
← R_2	0	5/3	−1	0	−4/3	1	2	6/5
S_3	0	5/3	0	1	−1/3	0	3	9/5
Z	0	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	−M	0	$-\frac{7}{3}M+\frac{4}{3}$	0	2M+4	

المتغير الداخل هو X_2 الذي يقابل أكبر قيمة موجبة إلى M في صف Z وهي ($\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$)، والخارج R_2 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 6/5، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثالث.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 \div \frac{5}{3}$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 - \frac{1}{3} \times \text{New Row}_2$$

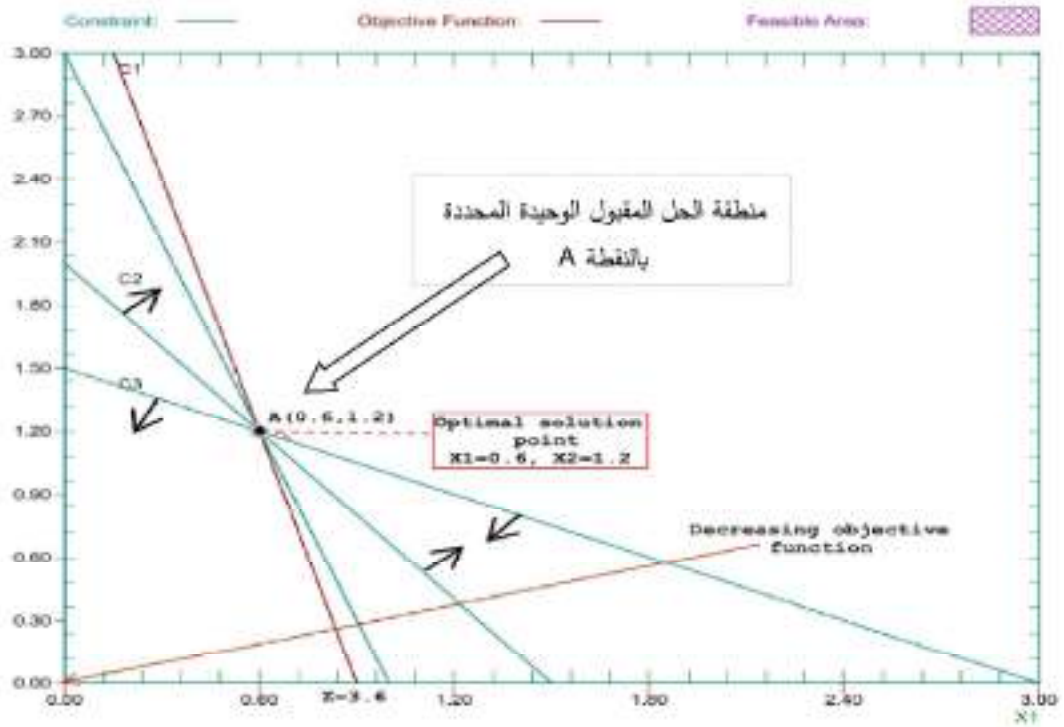
$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - \frac{5}{3} \times \text{New Row}_2$$

$$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - (\frac{5}{3}M + \frac{1}{3}) \times \text{New Row}_2$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS
X_1	1	0	1/5	0	3/5	−1/5	3/5
X_2	0	1	−3/5	0	−4/5	3/5	6/5
S_3	0	0	1	1	1	−1	1
Z	0	0	1/5	0	$\frac{8}{5}-M$	$-\frac{1}{5}-M$	18/5

نتوقف لأن جميع قيم صف Z سالبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل هو $X_1=3/5=0.6,\ X_2=6/5=1.2,\ S_3=1$ و Min. $Z=18/5=3.6$ ولتأكيد ذلك يتم استخدام طريقة الرسم، والتي أعطتنا قيم متطابقة للقيم أعلاه كما في الرسم البياني الآتي:



٢-٨-٣ طريقة السمبلكس ذات المرحلتين Two-Phase Simplex Method

بسبب صعوبة الحسابات التي تتطلبها طريقة (Big-M) عند إضافة المعامل M الى متغيراتها، مما قد يسبب الكثير من أخطاء التدوير (Roundoff errors) التي من شأنها أن تعطي نتائج غير دقيقة لطريقة السمبلكس، وبسبب التقريب الناتج عن القيم الكبيرة جداً لمعاملات المتغيرات الصناعية في دالة الهدف عند استخدام الحاسوب، خاصة إذا كانت معاملات متغيرات المسألة الأصلية مثل X_1 و X_2 صغيرة جداً مما يؤدي إلى حذفها وأهمالها، لهذا تم استحداث طريقة السمبلكس ذات المرحلتين للتخلص من المتغيرات الصناعية.

تتلخص خطوات طريقة السمبلكس ذات المرحلتين بما يأتي[1]:

١- يتم إضافة المتغيرات الصناعية (R_i) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية.

٢- المرحلة الأولى للحل (Phase I) وفيها نستخدم دالة هدف جديدة وهمية من نوع (Min.) بغض النظر عن دالة الهدف الأصلي، تحتوي على المتغيرات الصناعية فقط بمعامل 1 بدلاً من M، أو بمعامل (1-) في حالة دالة الهدف من نوع (Max.)، أما بقية المتغيرات فتكون بمعامل (0)، والهدف من هذه المرحلة هو للتخلص من المتغيرات الصناعية التي تم إضافتها إلى القيود ودالة الهدف قبل الأنتقال للمرحلة الثانية، ليحل محلها متغيرات المسألة الأصلية.

٣- نحول المسألة إلى الصيغة القياسية ونستمر بالدورات التكرارية الاعتيادية حتى تصبح قيمة دالة الهدف مساوية للصفر ويتحقق شرط الأمثلية لتنتهي بهذا المرحلة

(1) Ibid, p. 108.

الأولى، ونفحص الحل الأمثل للتأكد من خلوها من المتغيرات الصناعية بقيم أكبر من صفر، فإن وجدت فذلك يعني بأن الحل غير مقبول (غير متاح) (Infeasible Solution) ولا يوجد حل للمسألة ونتوقف عند هذهِ المرحلة، وبخلافه فإن هناك حلاً للمسألة وننتقل إلى المرحلة الثانية.

٤- نحذف كل صفوف وأعمدة المتغيرات الصناعية R من الجدول الأخير للمرحل الأولى (أذ أن دورها قد أنتهى)، ونستخدم في دالة الهدف متغيرات القرار فقط لتبدأ المرحلة الثانية (Phase II)، والتي تستخدم لإيجاد الحل الأمثل.

٥- تكون الجدول الأول للمرحلة الثانية بالاعتماد على دالة الهدف الأصلية ونستمر بالدورات التكرارية الاعتيادية حتى نصل إلى الحل الأمثل النهائي للمسألة.

مثال (٢-٢٢): أوجد الحل الأمثل لمثال (٢-٢١) السابق بطريقة السمبلكس ذات المرحلتين:

Min. $Z= 4X_1 + X_2$

Sub. to

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: المرحلة الأولى (Phase I)

Min. $Z_1 = R_1 + R_2$ (or $Z_1 - R_1 - R_2 = 0$)

Sub. to

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \quad ...(1)$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \quad ...(2)$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4 \quad ...(3)$$
$$X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

نعوض عن قيمة R_1 و R_2 في دالة الهدف باستخدام معادلات القيود 1 و 2 أعلاه لإيجاد قيمة Z_1 حيثُ إن:

From (1) $\rightarrow R_1 = 3 - 3X_1 - X_2$

From (2) $\rightarrow R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2$

$\because Z_1 = R_1 + R_2 = 9 - 7X_1 - 4X_2 + S_2$

$\therefore Z_1 - R_1 - R_2 = 7X_1 + 4X_2 - S_2 = 9$

نستنتج أن $Z_1 = 9$ في الحل الأولي، ونحضر الجدول الأولي وبقية جداول المرحلة الأولى باتباع طريقة الحل المعتادة الآتية:

المرحلة الأولى التكرار صفر

B.V. \ All	X_1 ↓	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
← R_1	3	1	0	0	1	0	3	1
R_2	4	3	−1	0	0	1	6	3/2
S_3	1	2	0	1	0	0	4	4
Z_1	7	4	−1	0	0	0	9	

إن العمليات المحورية التي نحن بحاجة لها للحصول على الجدول الجديد هي:

$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 \div 3$

$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 - 4 \times \text{New Row}_1$

$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - 1 \times \text{New Row}_1$

$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - 7 \times \text{New Row}_1$

المرحلة الأولى التكرار الأول

All B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
R_2	0	5/3	−1	0	−4/3	1	2	6/5
S_3	0	5/3	0	1	−1/3	0	3	9/5
Z_1	0	5/3	−1	0	−7/3	0	2	

إن العمليات المحورية التي نحن بحاجة لها للحصول على الجدول الجديد هي:

$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 - \frac{1}{3} \times \text{New Row}_2$

$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 \div \frac{5}{3}$

$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - \frac{5}{3} \times \text{New Row}_2$

$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - \frac{5}{3} \times \text{New Row}_2$

جدول الحل الأمثل للمرحلة الأولى التكرار الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS
X_1	1	0	1/5	0	3/5	−1/5	3/5
X_2	0	1	−3/5	0	−4/5	3/5	6/5
S_3	0	0	1	1	1	−1	1
Z_1	0	0	0	0	−1	−1	0

يُمثل الجدول الأخير أعلاه نهاية المرحلة الأولى حيثُ إن شرط أمثلية الحل قد تحقق حيثُ $Z_1=0$ و $X_1 = 3/5$ و $X_2 = 6/5$ و $S_3 = 1$، وبالتالي يعتبر الجدول الأولي للمرحلة الثانية بعد حذف المتغيرات الصناعية لإنها خرجت من قاعدة الحل ولم يصبح هنالك داعي لوجودها.

المرحلة الثانية (Phase II):

يتم حذف أعمدة المتغيرات الصناعية من جدول الحل النهائي للمرحلة الأولى، ونكتب المسألة الأصلية معتمدين على الجدول النهائي بالشكل:

Min. $Z - 4X_1 + X_2$ ➔ Min. $Z - 4X_1 - X_2 + S_2 + S_3 = 0$

Sub. to

$$X_1 + \frac{1}{5} S_2 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5} S_2 = \frac{6}{5}$$

$$S_2 + S_3 = 1$$

$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل للمرحلة الأولى – التكرار الثاني بعد عملية الحذف

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	RHS
X_1	1	0	1/5	0	3/5
X_2	0	1	−3/5	0	6/5
S_3	0	0	1	1	1
Z	−4	−1	0	0	0

نُلاحظ أن شرط تحقق الحل الأساسي المقبول غير متوفر في صف دالة الهدف في الجدول أعلاه للمتغيرات الأساسية X_1 و X_2 حيثُ يجب أن تكون قيمها أصفار، وعليه يتم استخدام دالة الهدف الأصلية ($Z = 4X_1 + X_2$) ونعوض عن قيم المتغيرات الأساسية X_1 و X_2 من الجدول أعلاه بالشكل الآتي:

From X_1 row $\rightarrow X_1 + \frac{1}{5}S_2 = \frac{3}{5} \rightarrow X_1 = \frac{-1}{5}S_2 + \frac{3}{5}$

From X_2 row $\rightarrow X_2 - \frac{3}{5}S_2 = \frac{6}{5} \rightarrow X_2 = \frac{3}{5}S_2 + \frac{6}{5}$

وبالتعويض عن X_1 و X_2 في دالة الهدف ($Z = 4X_1 + X_2$) نحصل على:

$$Z = 4\left(\frac{-1}{5}S_2 + \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}S_2 + \frac{6}{5} = \frac{-1}{5}S_2 + \frac{18}{5}$$

$$\therefore Z + \frac{1}{5}S_2 = \frac{18}{5}$$

نكون الآن جدول الحل الأولي للمرحلة الثانية بعد تحقق شرط الحل الأساسي.

المرحلة الثانية التكرار صفر

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	RHS	Ratio
X_1	1	0	1/5	0	3/5	3
X_2	0	1	−3/5	0	6/5	يهمل
S_3	0	0	1	1	1	1
Z	0	0	1/5	0	18/5	

نستمر بالحل بسبب أمتلاكنا قيم موجبة في صف Z حيثُ أن المتغير الداخل هو S_2 الذي يقابل أكبر قيمة موجبة وهي ($\frac{1}{5}$) لأن دالة الهدف من نوع .Min، والمتغير الخارج S_3 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 1، أما معادلات تعديل جميع الصفوف فهي:

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 - \frac{1}{5} \times \text{New Row}_3$$

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 - \left(\frac{-3}{5}\right) \times \text{New Row}_3$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 \div 1$$

$$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - \frac{1}{5} \times \text{New Row}_3$$

الحل الأمثل للمرحلة الثانية التكرار الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	RHS
X_1	1	0	0	−1/5	2/5
X_2	0	1	0	3/5	9/5
S_2	0	0	1	1	1
Z	0	0	0	−1/5	17/5

نتوقف لأن جميع قيم صف Z سالبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، ويُمثل الجدول الأخير نهاية المرحلة الثانية والحل الأمثل لها، حيثُ Z-17/5-3.4 و X_1-2/5-0.4 و X_2-9/5-1.8 و S_2-1، وأن قيمة دالة الهدف قد أصبحت أقل مما تم الحصول عليه من أسلوب Big-M.

مثال (٢-٢٣): أوجد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس ذات المرحلتين للنموذج الآتي:

Max. $Z = 3X_1 + X_2 - X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10$$
$$2X_1 - X_2 \geq 2$$
$$X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 6$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: المرحلة الأولى (Phase I)

Max. $Z_1 = -R_1 - R_2 - R_3$ (or $Z_1 + R_1 + R_2 + R_3 = 0$)

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 10 \quad ...(1)$$
$$2X_1 - X_2 - S_2 + R_2 = 2 \quad ...(2)$$
$$X_1 - 2X_2 + X_3 - S_3 + R_3 = 6 \quad ...(3)$$
$$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

نعوض عن قيمة R_1 و R_2 و R_3 في دالة الهدف باستخدام معادلات القيود 1 و2 و3 أعلاه لإيجاد قيمة Z_1 حيثُ إن:

From (1) $\rightarrow R_1 = 10 - X_1 - X_2 - X_3$

From (2) $\rightarrow R_2 = 2 - 2X_1 + X_2 + S_2$

From (3) $\rightarrow R_3 = 6 - X_1 + 2X_2 - X_3 + S_3$

$\because Z_1 = -R_1 - R_2 - R_3 = -10 + X_1 + X_2 + X_3 - 2 + 2X_1 - X_2 - S_2 - 6 + X_1 - 2X_2 + X_3 - S_3$

$\therefore Z_1 - 4X_1 + 2X_2 - 2X_3 + S_2 + S_3 = -18$

نستنتج أن $Z_1 = -18$ في الحل الأولي، ونحضر الجدول الأولي وبقية جداول المرحلة الأولى بأتباع طريقة الحل المعتادة الآتية:

المرحلة الأولى التكرار صفر

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	RHS	Ratio
R_1	1	1	1	0	0	1	0	0	10	10
R_2	2	−1	0	−1	0	0	1	0	2	1
R_3	1	−2	1	0	−1	0	0	1	6	6
Z_1	−4	2	−2	1	1	0	0	0	−18	

المرحلة الأولى التكرار الأول

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	RHS	Ratio
R_1	0	3/2	1	1/2	0	1	−1/2	0	9	9
X_1	1	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	1	يهمل
R_3	0	0	1	1/2	−1	0	−1/2	1	5	5
Z_1	0	0	−2	−1	1	0	2	0	−16	

المرحلة الأولى التكرار الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	RHS	Ratio
R_1	0	3/2	0	0	1	1	0	−1	4	4
X_1	1	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	1	يهمل
X_3	0	0	1	1/2	−1	0	−1/2	1	5	يهمل
Z_1	0	0	0	0	−1	0	1	2	−6	

جدول الحل الأمثل للمرحلة الأولى التكرار الثالث

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	RHS
S_3	0	3/2	0	0	1	0	0	−1	4
X_1	1	−1/2	0	−1/2	0	1	1/2	0	1
X_3	0	3/2	1	1/2	0	0	−1/2	0	9
Z_1	0	3/2	0	0	0	1	1	1	−2

المرحلة الثانية (Phase II):

يتم حذف أعمدة المتغيرات الصناعية من جدول الحل النهائي للمرحلة الأولى، ويتم استخدام دالة الهدف الأصلية وهي $Z = 3X_1 + X_2 - X_3$ ونعوض عن قيم المتغيرات الأساسية X_1 و X_2 و X_3 من الجدول أعلاه بالشكل الآتي:

From X_1 Row $\rightarrow X_1 - \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}S_2 = 1 \rightarrow X_1 = \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}S_2 + 1$

From X_3 Row $\rightarrow \frac{3}{2}X_2 + X_3 + \frac{1}{2}S_2 = 9 \rightarrow X_3 = \frac{-3}{2}X_2 - \frac{1}{2}S_2 + 9$

وبالتعويض عن X_1 و X_3 في دالة الهدف نحصل على:

$$Z = \frac{3}{2}X_2 + \frac{3}{2}S_2 + 3 + X_2 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}S_2 - 9$$

$$\therefore Z - 4X_2 - 2S_2 = -6$$

نكون الآن جدول الحل الأولي للمرحلة الثانية بعد تحقق شرط الحل الأساسي:

المرحلة الثانية التكرار صفر

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_3	0	3/2	0	0	1	4	8/3
X_1	1	−1/2	0	−1/2	0	1	يهمل
X_3	0	3/2	1	1/2	0	9	18/3
Z	0	−4	0	−2	0	−6	

الحل الأمثل للمرحلة الثانية التكرار الأول

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	RHS
X_2	0	1	0	0	2/3	8/3
X_1	1	0	0	−1/2	1/3	7/3
X_3	0	0	1	1/2	−1	5
Z	0	0	0	−2	8/3	14/3

يُمثل الجدول الأخير أعلاه نهاية المرحلة الثانية والحل الأمثل لها، حيثُ Z=14/3 و X_1=7/3 و X_2=8/3 و X_3=5.

٢-٩ الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية Special cases for L.P.P. solving

هنالك بعض الحالات الخاصة التي قد تُصادفنا عند تطبيق مسائل البرمجة الخطية منها[1]:

٢-٩-١ الحل المُفكك (المُتلاشي) Degeneracy Solution

يُسمى حل مشكلة البرمجة الخطية مُفكك عندما تكون أحد أو أغلب المتغيرات الأساسية مُساوية للصفر، وسببها وقوع نقطة الحل الأمثل على أحد الاحداثيات مما يجعل قيمة X_1 أو X_2 مساوية للصفر، وقد تحدث حالة التلاشي بيانياً عند تقاطع ثلاث أو أكثر من القيود (بما فيها قيود عدم السلبية) في النقطة نفسِها من فضاء الحل المُمكن، ويُسمى الحل عندها بحل مُتلاشي، سواء كان الحل أمثل أو غير ذلك، ونُلاحظ هذهِ الحالة في طريقة السمبلكس عند تساوي أقل حاصل قسمة لمتغيرين يجب إخراج أحدهما ليصبح من متغير غير أساسي إلى متغير أساسي، وهذا يعني أن جميع المتغيرات الأساسية المُرشحة لأن تكون متغيرات خارجة تصل إلى الصفر عند دخول المتغير الداخل مكان إحدهما.

مثال (٢-٢٤): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم والسمبلكس للنموذج التالي وبين نوع ذلك الحل:

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 129.

Max. $Z = 3X_1 + 9X_2$

Sub. to

$X_1 + 4X_2 \le 8$

$X_1 + 2X_2 \le 4$

$X_1, X_2 \le 0$

الحل: نحول المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية:

Max. $Z = 3X_1 + 9X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Sub. to

$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$

$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$

$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$

$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$

$Z - 3X_1 - 9X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

B.V. \ All	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
S_1	1	4	1	0	8	(2)
S_2	1	2	0	1	4	2
Z	−3	−9	0	0	0	

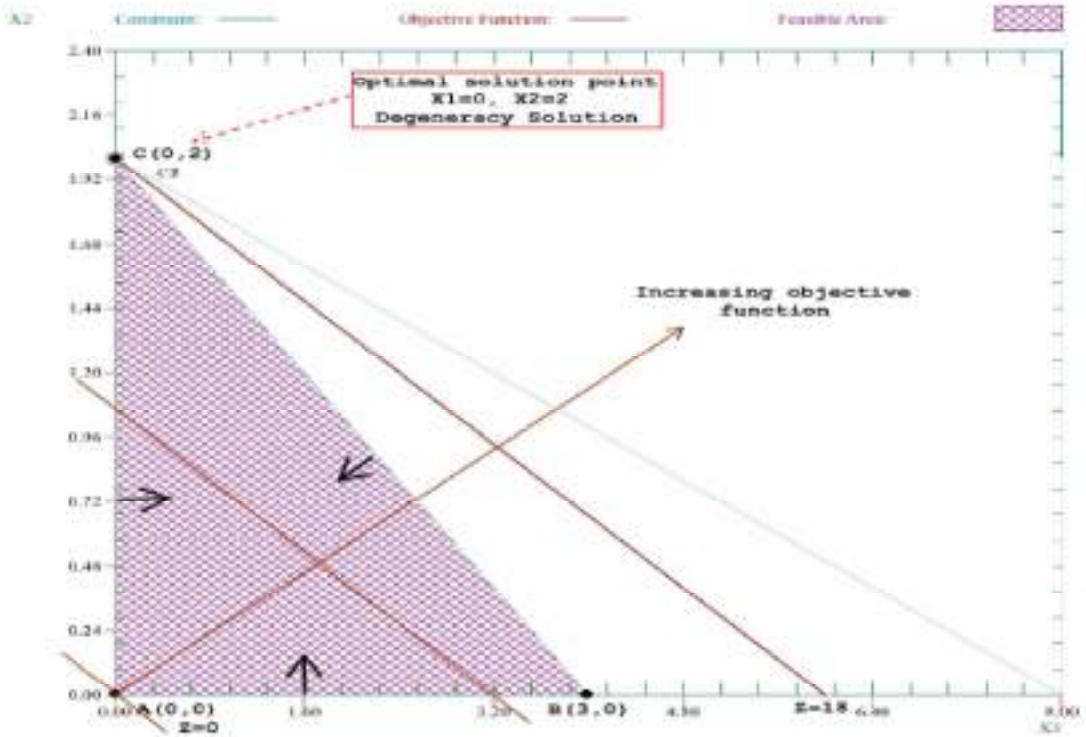
جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

B.V. \ C_j	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
X_2	1/4	1	1/4	0	2	8
S_2	1/2	0	−1/4	1	0	(0)
Z	−3/4	0	9/4	0	18	

جدول الحل الأساسي المقبول الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
X_2	0	1	1/2	−1/2	2
X_1	1	0	−1	2	0
Z	0	0	3/2	3/2	18

أي أن الحل الأمثل هو $X_2= 2$ ، $X_1= 0$ و Max. Z=18 وهو حل مفكك لأن قيمة أحد المتغيرات $X_1= 0$ ، ومن الممكن مُلاحظة ذلك في الرسم البياني الآتي:



٢-٩-٢ الحل غير المُحدد Unbounded Solution

هذه الحالة تحدث عندما تكون منطقة الحل غير مُحددة بقيد، لذلك تزداد قيمة دالة الهدف بصورة غير مُحددة، كما تم الإشارة إليه في مُلاحظة (٢-٨) مثال (٢-١٧) السابق، ويُمكن مُلاحظة ذلك في جدول السمبلكس عندما تكون مُعاملات المُتغير الداخل في جميع القيود سالبة أو صفر سواء في الجدول الأول أو في أي دورة تكرارية أخرى للحل، كما في المثال الآتي:

مثال (٢-٢٥): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم والسمبلكس للنموذج التالي وبين نوع ذلك الحل.

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2$

Sub. to

$$X_1 - X_2 \leq 10$$
$$2X_1 - 2X_2 \leq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نحول المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية:

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Sub. to

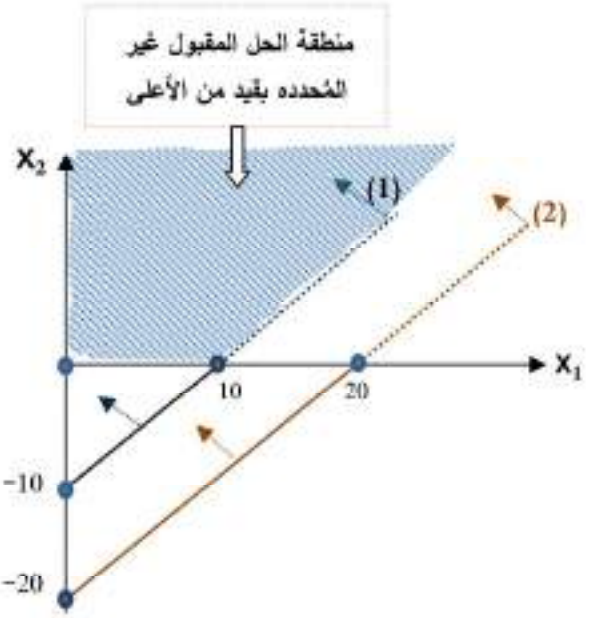
$$X_1 - X_2 + S_1 = 10$$
$$2X_1 - 2X_2 + S_2 = 40$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$$X_1 - X_2 + S_1 = 10$$
$$2X_1 - 2X_2 + S_2 = 40$$
$$Z - 2X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
S_1	1	−1	1	0	10	يهمل
S_2	2	−2	0	1	40	يهمل
Z	−2	−3	0	0	0	

حيثُ نُلاحظ إن معامل X_2 في دالة الهدف يملك أكبر سالبية لهذا فهو متغير داخل ولتحديد المتغير الخارج يجب إجراء حساب (Ratio) وهذا لا يجوز لأن جميع القيم تحت عمود X_2 سالبة ولا يُمكن القسمة عليها، لهذا يعتبر الحل غير مُحدد، ويُمكن مُلاحظة ذلك من الرسم التالي الخاص بهذهِ المسألة:



نُلاحظ إن منطقة الحل المقبول غير مُحدده بقيد ولهذا فالحل غير مُحدد لأن دالة الهدف من نوع .Max، ولا يُمكن تحديد قيمة عظمى لمنطقة الحل المقبول، ولقد تم إمداد القيدين للربع الأول بسبب قيد عدم السالبية ($X_1, X_2 \geq 0$)، وفي حالة إن نوع الدالة .Min عندها سنملك نقطتين مُتطرفتين هما (0,0) و(10,0) لأنه يُمكن تحديد النقاط المُتطرفة، هذا يعني إن منطقة الحل المقبول غير مُحددة ولكن يوجد حل مُحدد للمسألة.

٢-٩-٣ تعدد الحلول المُثلى البديلة (Alternative Optimal Solutions) أو الحلول المُثلى المُضاعفة (Multiple O.S.)

في بعض الأحيان يكون لمسألة البرمجة الخطية عدة حلول مُثلى جميعها تُعطي قيمة واحدة لدالة الهدف، وهذه الحالة تحدث عند توازي دالة الهدف أحد القيود الهيكلية (المُحايدة) (Binding Constant) لهذا سيكون هنالك مالانهاية من الحلول المُثلى تقع على ذلك القيد، كما في المثال الآتي:

مثال (٢-٢٦): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم والسمبلكس للنموذج التالي وبين نوع ذلك الحل.

Max. $Z = X_1 + 2X_2$

Sub. to

$X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_1 + X_2 \leq 1$

$X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

$X_1 + 2X_2 = 10$ ...(1)

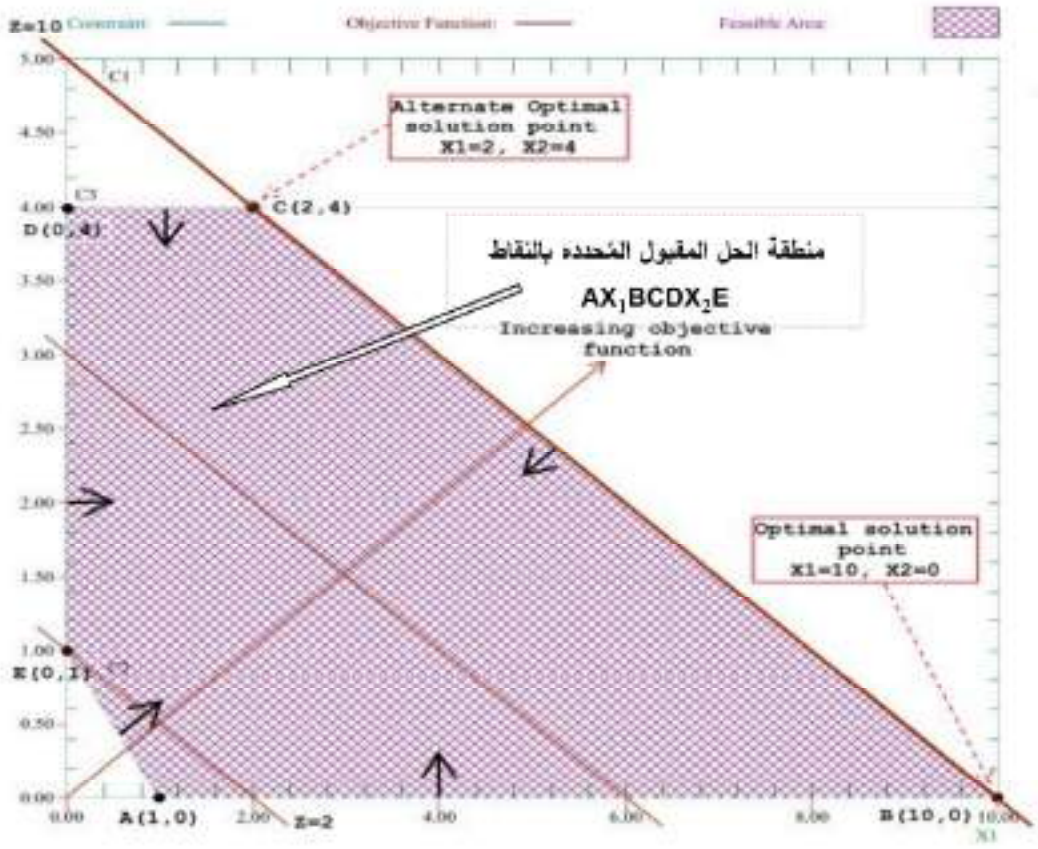
X_1	X_2	
0	5	← (0,5)
10	0	← (10,0)

$X_1 + X_2 = 1$ ...(2)

X_1	X_2	
0	1	← (0,1)
1	0	← (1,0)

$X_2 = 4$ ...(3)

يتم رسم قيود المسألة الثلاثة لتحديد منطقة الحل المقبول ثم تحديد نقطة أو نقاط الحل الأمثل من الرسم.



إن منطقة الحل المقبول هي AX_1BCDX_2E وهنالك عدة حلول مُثلى منها عند النقطة B و C وجميع النقاط الواقعة على الخط المستقيم BC وجميعها تُعطي نفس القيمة لدالة الهدف Z=10، أي إن هنالك مالانهاية من الحلول المُثلى ونُلاحظ إن دالة الهدف تمر بالضبط على المستقيم BC عندما Z=10.

Points	(X_1 , X_2)	$Z=X_1 +2X_2$
A	(1,0)	1
B	(10,0)	10
C	(2,4)	10
D	(0,4)	8
E	(0,1)	2



ويُمكن التعرف على حالة الحلول البديلة في جدول السمبلكس من مُلاحظة مُعاملات المتغيرات غير الأساسية X_j في دالة الهدف عند الحصول على جدول الحل الأمثل، فإذا كان معامل أحدهما صفر فيعتبر هذا مؤشر على وجود حل بديل آخر للمسألة ولكن لنفس قيمة دالة الهدف Z.

فمثلاً لو كان لدينا جدول الحل الأمثل أدناه لمسألة ما، وتم إختيار X_3 كمتغير داخل لأن معاملهُ صفر في دالة الهدف وهو لم يصبح متغير أساسي لحد الآن علماً أنهُ من متغيرات المسألة الأصلية، بالمقابل يخرج المتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة وهو S_1 ليصبح متغيراً غير أساسي، نُلاحظ إن دالة الهدف قد أحتفضت بقيمتها Z=18، وقد تم الحصول على حل بديل آخر بقيم أخرى لمتغيرات القرار X_j.

جدول الحل الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	X_3 ↓	S_1	S_2	RHS	Ratio
X_1	1	0	1	0	0	4	4/1
S_1 ←	0	0	3	1	−1	6	6/3
X_2	0	1	−3/2	0	1/2	3	يهمل
Z	0	0	0	0	1	18	

جدول الحل الأمثل البديل

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
X_1	1	0	0	−1/3	1/3	2
X_3	0	0	1	1/3	−1/3	2
X_2	0	1	0	1/2	0	6
Z	0	0	0	0	1	18

٢-٩-٤ عدم وجود حلول مقبولة للمسألة Non-Existing Feasible Solution

في بعض الأحيان تكون قيود المُشكلة بصيغة مُعينة بحيث لا توجد نقطة تقاطع تحققها، ففي هذه الحالة تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن منطقة خالية ولا توجد حلول مقبولة للمسألة، وخاصة إذا تضمن الحل الأمثل متغيرات صناعية R_i موجبة، حيثُ يُعتبر هذا مؤشر على عدم وجود حل مقبول يحقق جميع قيود المسألة، وكما موضح بالحالة التالية:

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. To

$2X_1 + X_2 \leq 2$

$3X_1 + 4X_2 \geq 12$

$X_1 , X_2 \geq 0$

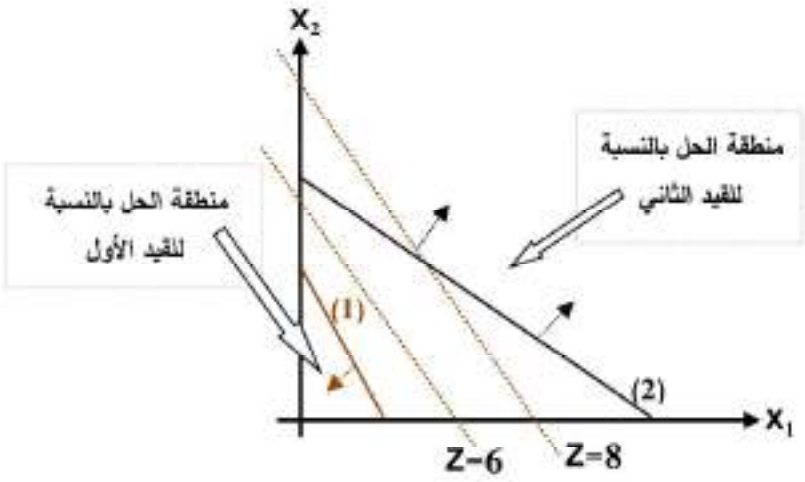
$2X_1 + X_2 = 2$ ...(1)

X_1	X_2	
0	2	*(0,2)*
1	0	*(1,0)*

$3X_1 + 4X_2 = 12$ ...(2)

X_1	X_2	
0	3	*(0,3)*
4	0	*(4,0)*

يتم رسم قيود المسألة لتحديد منطقة الحل المقبول ونقطة الحل الأمثل من الرسم، ويتضح إنهُ ليس هنالك تقاطع بين قيود المسألة وإن دالة الهدف Z=6 تمر بالمنطقة الخالية التي تفصل بين قيود المسألة وهذا يعني عدم وجود حل مقبول للمسألة، ويُمكن مراجعة مثال (٢-١٤) الذي يوضح نفس الحالة.



٢-٩-٥ المتغيرات غير المُحددة بإشارة Unrestricted in sign

قد نصادف في بعض المسائل إن المتغير X_i غير مُحدد بإشارة، فإننا نستبدلهُ بالمتغيرين غير السالبين $\bar{\bar{x}}_i$ & $\bar{x}_i$ وفقاً للعلاقة $x_i = \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i$ حيثُ $\bar{x}_i = +x_i \geq 0$ و $\bar{\bar{x}}_i = -x_i < 0$ ، ونُشير إنه في طريقة السمبلكس لا يوجد حل أساسي مُمكن يحتوي كلاً من $\bar{\bar{x}}_i$ & $\bar{x}_i$ بقيم موجبة معاً، فإذا كان أحدهما موجب فيُشترط أن يكون الآخر صفر، أو قد يكون كلاهما في حل مُعين بقيم صفرية.

٢-١٠ النموذج الثنائي والعلاقات بين النموذج الأولي - الثنائي

Dual Model and Primal – Dual Relationships

عند مناقشة مشاكل البرمجة الخطية، لابد من مناقشة مشكلة أخرى من مشاكلها وهي الثنائية (Duality)، حيث يقترن دائماً بكل مشكلة أولية (Primal Problem) نموذج آخر يطلق عليه المشكلة المقابلة أو الثنائية (Dual Problem)[1][2]، ويعني هذا أنه بالإمكان تحويل أية مشكلة في البرمجة الخطية إلى ما يقابلها من نموذج، ويتضمن إستخدام النموذج الثنائي على فوائد عديدة منها:

١) سهولة وسرعة التوصل إلى الحل الأمثل، حيث قد يتطلب إحدى المشاكل إجراءات حل مطولة وفق الطريقة المبسطة (Simplex) للنموذج الثنائي، وعلى العكس من ذلك, فقد تتصف حل المشكلة بالنموذج الثنائي بالصعوبة، عليه يكون حلها أسهل عند تحويلها إلى النموذج الأصلي.

---

(1) **Ibid.** p.242.

(2) Winston Wayne L., **Op. Cit.**, p. 34.

٢) الحل الأمثل لأحدهما يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى وللتعرف على القيمة الحقيقية للموارد التي استخدمت كمدخلات.

٣) تساعد الإدارة على معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.

٤) يجب أن يتم حساب أسعار الظل لأنها تمثل القيمة الحقيقية للموارد وذلك للتأكد من أنها لا تزيد عن إجمالي الأرباح.

إذا فالهدف الرئيسي من حل المشكلة الثنائية هو الحصول على أسعار الظل كمنتج أساسي لحل نموذج البرمجة الخطية وهي تظهر في عمود قيم المتغيرات الأساسية، لكنها تظهر كمنتج ثانوي بصف اختبار أمثلية الحل وفي المشكلة الثنائية تظهر في القيم الأصلية، ولابد من مراعاة بعض النقاط عند عملية التحويل من نموذج أولي إلى ثنائي أو بالعكس:

١) إذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح، فيفترض أن تكون جميع المتباينات بإتجاه واحد (أصغر أو يساوي $\leq$)، بينما تكون المتباينات (أكبر أو تساوي $\geq$) في حالة كون المشكلة تهدف إلى تقليل التكاليف، أما إذا وجدت بعض المتباينات تخالف ما ذكر أعلاه، فلا بد من تحويلها إلى الإتجاه المطلوب وذلك بضربها في(-1).

٢) بالنسبة للقيد الذي يحمل أشارة (=)، فإن المتغير الذي يقابلهُ في المسألة الثنائية سيكون غير محدد بإشارة (Unrestricted in sign)، والعكس صحيح، فالمتغير غير المحدد بإشارة في المسألة الأولية، سيقابلهُ قيد بإشارة (=) في المسألة الثنائية.

٣) إذا كانت للمشكلة الثنائية حل أمثل، فإن للمشكلة الأولى حلاً أمثلاً والعكس صحيح، وتكون قيم الحلول المثلى للمشكلة الأولى والثنائية متساوية.

الآن يُمكن وضع المشكلة الأولية بصيغتها القياسية وما يقابلها للصيغة الثنائية بالشكل الآتي:

Primal Problem

Maximize $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

subject to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m$

and

$x_j \ge 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n.$

Dual Problem

Minimize $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

subject to

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n$

and

$y_i \ge 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m.$

حيثُ نُلاحظ أن المشكلة الثنائية تستخدم بالضبط نفس المعاملات في المشكلة الأولية، لكن في مواقع مختلفة، وللتبسيط يُمكن أعادة صياغتهما باستخدام المصفوفات[1].

Primal Problem

Maximize $Z = \mathbf{cx},$

subject to

$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$

and

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$

Dual Problem

Minimize $\mathbf{W} = \mathbf{yb},$

subject to

$\mathbf{yA} \ge \mathbf{c}$

and

$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}.$

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 151.

حيثُ $c = [c_1\ c_2\ \dots\ c_n]$ متجه صفي عدد عناصرهُ n، ويُمثل عناصر مُعاملات دالة الهدف في المشكلة الأولية، ويقابلها في ذلك $b = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n]$ في المشكلة الثنائية.

وإن $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$ مُتجه عمودي عدد عناصرهُ n، ويُمثل مُتغيرات القرار في المشكلة الأولية، ويقابلها في ذلك $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix}$ في المشكلة الثنائية.

وإن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة (m × n) تُمثل مُعاملات مُتغيرات القرار في القيود سواء للمشكلة الأولية أو الثنائية.

الجدول (٢-٣) يوضح كيفية تحويل المشكلة الأولية إلى ما يقابلها بالصيغة الثنائية، أما جدول (٢-٤) فيوضح التعامل مع قيود ومتغيرات المشكلتين بشكل مختصر :

	المشكلة بصيغتها الثانية	المشكلة بصيغتها الأولية
١	عدد متغيرات القرار	بقدر عدد القيود
٢	معاملات دالة الهدف	هي معاملات الطرف الأيمن
٣	معاملات الطرف الأيمن	هي معاملات دالة الهدف
٤	دالة الهدف من نوع (Min.)	أذا كانت دالة الهدف (Max.) والعكس صحيح

جدول (٢-٣) يوضح كيفية تحويل المشكلة الأولية إلى ما يقابلها بالصيغة الثانية

Maximization Problem		Minimization Problem
Constraints		Variables
≥ 0	⟺	≤ 0
≤ 0		≥ 0
=		Unrestricted
Variables		Constraints
≥ 0	⟺	≥ 0
≤ 0		≤ 0
Unrestricted		=

جدول (٢-٤) يوضح كيفية التعامل مع قيود ومتغيرات المشكلة الأولية والثانية

مثال (٢-٢٧): أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Primal	Primal in algebric form	Dual variables
Max. $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max. $Z = 3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$	
Sub. to	Sub. to	
$X_1 \leq 4$	$X_1 + X_3 = 4$	Y_1
$2X_2 \leq 12$	$2X_2 + X_4 = 12$	Y_2
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$	Y_3
$X_1 , X_2 \geq 0$	$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 \geq 0$	

Dual Problem:

Min. $W = 4Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3$

Sub. to

$$Y_1 + 3Y_3 \geq 3$$
$$2Y_2 + 2Y_3 \geq 5$$
$$Y_1 \geq 0$$
$$Y_2 \geq 0$$
$$Y_3 \geq 0$$

ويُمكن صياغة المسألة الأولية والثنائية باستخدام المصفوفات كما هو موضح أدناه:

Primal Problem in Matrix Form

Maximize $Z = [3, 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

⇨

Dual Problem in Matrix Form

Minimize $W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

subject to

$$[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5]$$

and

$$[y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0].$$

مثال (٢-٢٨): أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Primal	Primal in algebric form	Dual variables
Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 + 10X_3$	Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 + 10X_3 + 0X_4$	
Sub. to	Sub. to	
$2X_1 + X_2 + 5X_3 \leq 9$	$2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_4 = 9$	Y_1
$3X_1 + 4X_2 - 6X_3 = 12$	$3X_1 + 4X_2 - 6X_3 + 0X_4 = 12$	Y_2
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$	

Dual Problem:

Min. $W = 9Y_1 + 12Y_2$

Sub. to

$$2Y_1 + 3Y_2 \geq 3$$
$$Y_1 + 4Y_2 \geq 2$$
$$5Y_1 - 6Y_2 \geq 10$$
$$Y_1 + 0Y_2 \geq 0$$
$$Y_2 \text{ unrestricted in sign}$$

$\Longrightarrow$ $Y_1 \geq 0$, Y_2 unrestricted in sign

مثال (٢-٢٩): أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Primal	Primal in algebric form	Dual variables
Min. $Z = 15X_1 + 12X_2$	Min. $Z = 15X_1 + 12X_2 + 0X_3 + 0X_4$	
Sub. to	Sub. to	
$X_1 + 2X_2 \geq 3$	$X_1 + 2X_2 - X_3 + 0X_4 = 3$	Y_1
$2X_1 - 4X_2 \leq 5$	$2X_1 - 4X_2 + 0X_3 + X_4 = 5$	Y_2
$X_1 , X_2 \geq 0$	$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$	

Dual Problem:

Max. $W = 3Y_1 + 5Y_2$

Sub. to

$$\left.\begin{aligned} Y_1 + 2Y_2 &\leq 15 \\ 2Y_1 - 4Y_2 &\leq 12 \\ -Y_1 &\leq 0 \\ Y_2 &\leq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad Y_1 \geq 0,\ Y_2 \leq 0$$

٢-١١ مسائل محلولة

سؤال (٢-١)

تمتلك شركة ديالى العامة للصناعات الكهربائية (Diala State Company) مصنعاً لانتاج صنفين من أجهزة المكواة الكهربائي هما I و II، وتُقدر الأرباح العائدة من كل وحدة (مكواة) مصنوعة من الصنفين I و II بمقدار 25 و 15 ألف دينار على التوالي، ونظراً لمحدودية الموارد فإن البرنامج الحالي للشركة يتضمن انتاجاً شهرياً قدرهُ 20 وحدة من الصنف I و 14 وحدة من الصنف II.

ترغب الشركة في إعادة النظر في برنامجها الحالي للانتاج لمعرفة ما إذا كان هُناك برنامج أفضل للانتاج يَدرُ عليها أرباحاً أكبر في الشهر، حيثُ تمر عملية انتاج المكواة في أربعة أقسام ونتيجة للدراسة التي قام بها المختصون في الأقسام الأربعة تبين إن محدودية الوقت المتوفر هو العنصر الوحيد ذو الصلة بمحدودية الطاقة الانتاجية.

يُبين الجدول التالي الوقت بالساعة الذي تتطلبهُ صناعة كل وحدة من الصنفين في الأقسام الأربعة وطاقة الوقت المتوفرة في كل من هذهِ الأقسام (بالساعة شهرياً). وفقاً لهذهِ البيانات هل على الشركة أن تُغير برنامجها الحالي لتحقيق ربح أكبر شهرياً أم لا؟

القسم	الوقت بالساعة اللازم لصناعة الوحدة من		طاقة الوقت بالساعة
	الصنف I	الصنف II	المتوفرة للقسم شهرياً
1	3	0	٢40
2	0	2.9	٢25
3	2.5	2	٢60
4	1.3	1.5	٢20
الأرباح بألاف الدنانير	25	15	
الانتاج الشهري	20	14	

الحل: ترغب الشركة في معرفة ما إذا كان هُناك برنامج أفضل للانتاج يَدرُ عليها أرباحاً أكبر في الشهر، مع الأخذ بعين الاعتبار محدودية الوقت المتوفر في الأقسام الأربعة والذي له الدور المباشر على الطاقة الانتاجية.

الفرضيات:

نفرض إن X_1 يُمثل عدد المكواة الواجب انتاجها شهرياً من الصنف I حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد المكواة الواجب انتاجها شهرياً من الصنف II حيثُ $X_2 \geq 0$

Max. $Z = 25 X_1 + 15 X_2$			دالة الهدف
Sub. to	$3 X_1$	≤ 240	قيد الوقت للقسم ١
		$2.9 X_2 \leq 225$	قيد الوقت للقسم ٢
	$2.5 X_1 +$	$2 X_2 \leq 260$	قيد الوقت للقسم ٣
	$1.3 X_1 + 1.5 X_2$	≤ 220	قيد الوقت للقسم ٤
	X_1	≥ 20	قيد الانتاج من الصنف الأول
		$X_2 \geq 14$	قيد الانتاج من الصنف الثاني
		$X_1, X_2 \geq 0$	قيد عدم السلبية (*)

أما للإجابة على السؤال (هل على الشركة أن تُغير برنامجها الحالي لتحقيق ربح أكبر شهرياً أم لا)، فيمكن أعتماد أحدى طرق الحل كطريقة الرسم أو السمبلكس لتحديد قيم الحل الأمثل لهذه المسألة، حيث يمكن إجراء ذلك من قبل الطالب.

(*) يُمكن الاستغناء عن قيد عدم السالبية بسبب امتلاكنا قيود الانتاج التي تحدد الحد الأدنى من كل صنف.

سؤال (٢-٢)

تنتج الشركة العامة للصناعات الكهربائية والألكترونية في الوزيرية نوعين من برادات الماء (Water Coolers) ذات الحجم الصغير (40 L/hr) والكبير (165 L/hr)، تمر عملية التصنيع في ثلاث مراحل وهي مرحلة التجميع ومرحلة الطلاء ثم مرحلة مراقبة جودة الانتاج، أما الوقت (بالساعة) اللازم لإنهاء كل مرحلة من مراحل التصنيع الثلاث فقد تم تحديدها في الجدول الآتي:

النوع	الوقت اللازم للتجميع	الوقت اللازم للطلاء	الوقت اللازم للرقابة على الجودة
براد حجم صغير	3.6	1.6	0.5
براد حجم كبير	4.8	1.8	0.6

فإذا كان الوقت المُتاح سنوياً للقيام بكل مرحلة من مراحل التصنيع يبلغ 4800 ساعة لمرحلة التجميع و1980 ساعة لمرحلة الطلاء و900 ساعة لمرحلة الرقابة على جودة الانتاج، وتتوقع الشركة أن تبيع سنوياً على الأقل ما يعادل 300 براد من الحجم الصغير و180 براد من الحجم الكبير، وبناءاً على هذه المعلومات فإن مدير الانتاج يرغب في تحديد الكمية الواجب انتاجها سنوياً من كل نوع بحيث تحقق الشركة أكبر كمية ممكنة من الربح، مع العلم إن ربح الشركة من كل براد بالحجم الصغير يعادل $50 بينما ربح الشركة من كل براد بالحجم الكبير يعادل $75.

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة بطريقة الرسم أولاً، ثم بطريقة (Big-M) ثانياً.

الحل: تهتم هذهِ المشكلة بتخطيط الإنتاج بصورة سنوية من أجل الحصول على أكبر ربح مُمكن، مع الأخذ بعين الاعتبار أوقات العمل المُتاحة لمراحل الانتاج الثلاث والتي نلخصها بالجدول الآتي:

الربح بالدولار	ما يُباع سنوياً	الوقت اللازم للرقابة	الوقت اللازم للطلاء	الوقت اللازم للتجميع	النوع
50	على الأقل 300	0.5	1.6	3.6	براد حجم صغير
75	على الأقل 180	0.6	1.8	4.8	براد حجم كبير
		900	1980	4800	الوقت المتاح سنوياً

الفرضيات:

نفرض X_1 يُمثل عدد البرادات الواجب انتاجها سنوياً من الحجم الصغير حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد البرادات الواجب انتاجها سنوياً من الحجم الكبير حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف $\quad \text{Max. } Z = 50\,X_1 + 75\,X_2$

Sub. to

قيد الوقت اللازم للتجميع $\quad 3.6\,X_1 + 4.8\,X_2 \leq 4800$

قيد الوقت اللازم للطلاء $\quad 1.6\,X_1 + 1.8\,X_2 \leq 1980$

قيد الوقت اللازم للرقابة على الانتاج $\quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \leq 900$

قيد ما يباع من البرادات الصغيرة $\quad X_1 \geq 300$

قيد ما يباع من البرادات الكبيرة $\quad X_2 \geq 180$

قيد عدم السلبية (*) $\quad X_1, X_2 \geq 0$

(*) يُمكن الاستغناء عن قيد عدم السالبية بسبب امتلاكنا قيود الكميات المباعة التي تحدد الحد الأدنى من كل منتج.

- **الحل باستخدام طريقة الرسم:** يتم تحديد إحداثيات كل قيد كما يأتي:

$3.6\ X_1 + 4.8\ X_2 = 4800$ ...(1)

X_1	X_2	
0	1000	***(0,1000)***
1333	0	***(1333,0)***

$1.6\ X_1 + 1.8\ X_2 = 1980$ ...(2)

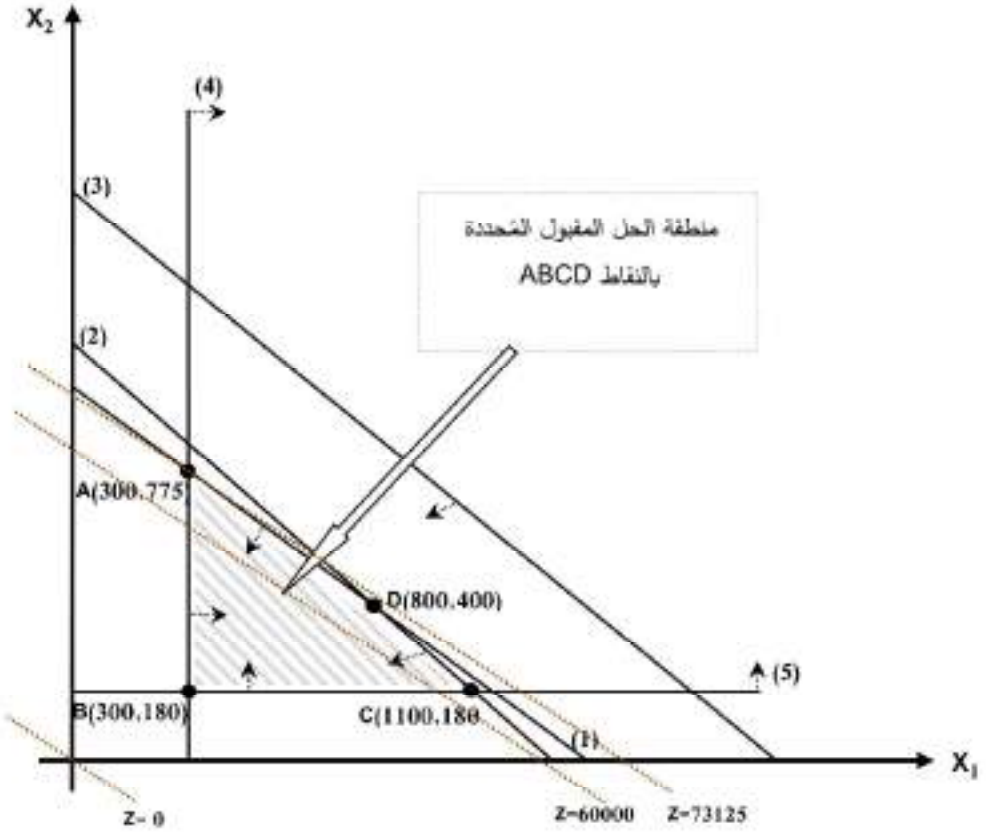
X_1	X_2	
0	1100	***(0,1100)***
1238	0	***(1238,0)***

$0.5\ X_1 + 0.6\ X_2 = 900$...(3)

X_1	X_2	
0	1500	***(0,1500)***
1800	0	***(1800,0)***

$X_1 - 300$ ...(4)

$X_2 - 180$ ...(5)



من الرسم أعلاه نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط ABCD.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 50X_1 + 75X_2$
A	(300,775)	73125
B	(300,180)	28500
C	(1100,180)	68500
D	(800,400)	70000

Max. Z=73125

وحيثُ إن دالة الهدف هي تعظيم الأرباح إلى أعلى حد، فإن النقطة A تحقق أعلى ربح ممكن، وهي تعني أنهُ لتعظيم الأرباح يجب على الشركة العامة أن تنتج $X_1 = 300$ براد من الحجم الصغير و $X_2 = 775$ براد من الحجم الكبير لنحصل على الربح الأعظم وهو $Z = 73125$، وهذا ما نُلاحظة عند رسم دالة الهدف بالشكل الآتي:

Let $Z = 0$,

Let $Z = 50X_1 + 75X_2 = 60000$

X_1	X_2	
0	800	← (0,800)
1200	0	← (1200,0)

Let $Z = 50X_1 + 75X_2 = 73125$

X_1	X_2	
0	975	→ (0,975)
1463	0	→ (1463,0)

بعد رسم دالة الهدف للقيم المُفترضة أعلاه، نُلاحظ أن أعلى نقطة تمر بها دالة الهدف هي النقطة A (300 , 775) وذلك يؤكد الحل الذي تم الحصول عليه بالاعتماد على النقاط.

- **الحل باستخدام طريقة** (Big-M): يفضل إعادة كتابة نموذج البرمجة الخطية الأصلي الآتي:

$$\text{Max. } Z = 50X_1 + 75X_2$$

Sub. to

$$3.6X_1 + 4.8X_2 \le 4800$$
$$1.6X_1 + 1.8X_2 \le 1980$$
$$0.5X_1 + 0.6X_2 \le 900$$
$$X_1 \ge 300$$
$$X_2 \ge 180$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية والصناعية:

$$\text{Max. } Z - 50X_1 - 75X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + MR_4 + MR_5 = 0$$

Sub. to

$$3.6X_1 + 4.8X_2 + S_1 = 4800$$
$$1.6X_1 + 1.8X_2 + S_2 = 1980$$
$$0.5X_1 + 0.6X_2 + S_3 = 900$$
$$X_1 - S_4 + R_4 = 300$$
$$X_2 - S_5 + R_5 = 180$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, R_4, R_5 \ge 0$$

نُلاحظ إن شروط الصيغة القياسية غير متحققة مع المتغيرين R_4 و R_5 لأن معاملاتهما في دالة الهدف هي (+M) وليست صفر، ولكي نجعلها صفراً يتم ضرب القيد الرابع والخامس بالقيمة (-M) ونجمعهما مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$Z - 50X_1 - 75X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + MR_4 + MR_5 = 0$$

$$-MX_1 + MS_4 - MR_4 = -300M$$

$$-MX_2 + MS_5 - MR_5 = -180M$$

$$Z+(-M-50)X_1+(-M-75)X_2+0S_1+0S_2+0S_3+MS_4+MS_5+0R_4+0R_5=-480M$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الأتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R_4	R_5	RHS	Ratio
S_1	3.6	4.8	1	0	0	0	0	0	0	4800	1000
S_2	1.6	1.8	0	1	0	0	0	0	0	1980	1100
S_3	0.5	0.6	0	0	1	0	0	0	0	900	1500
R_4	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	300	يهمل
R_5	0	1	0	0	0	0	-1	0	1	180	180
Z	-M-50	-M-75	0	0	0	M	M	0	0	-480M	

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R_4	R_5	RHS	Ratio
S_1	3.6	0	1	0	0	0	4.8	0	−4.8	3936	1093
S_2	1.6	0	0	1	0	0	1.8	0	−1.8	1656	1035
S_3	0.5	0	0	0	1	0	0.6	0	−0.6	792	1584
R_4	1	0	0	0	0	−1	0	1	0	300	300
X_2	0	1	0	0	0	0	−1	0	1	180	يهمل
Z	−M−50	0	0	0	0	M	−75	0	M+75	−300M+13500	

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R_4	R_5	RHS	Ratio
S_1	0	0	1	0	0	3.6	4.8	3.6	−4.8	2856	595
S_2	0	0	0	1	0	1.6	1.8	1.6	−1.8	1176	653
S_3	0	0	0	0	1	0.5	0.6	0.5	−0.6	642	1070
X_1	1	0	0	0	0	−1	0	1	0	300	يهمل
X_2	0	1	0	0	0	0	−1	0	1	180	يهمل
Z	0	0	0	0	0	−50	−75	M+50	M+75	28500	

جدول الحل الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R_4	R_5	RHS
S_5	0	0	0.21	0	0	0.75	1	0.75	−1	595
S_2	0	0	−0.38	1	0	0.25	0	−0.25	0	105
S_3	0	0	−0.13	0	1	0.05	0	−0.05	0	285
X_1	1	0	0	0	0	−1	0	1	0	300
X_2	0	1	0.21	0	0	0.75	0	0.75	0	775
Z	0	0	15.75	0	0	6.25	0	M−6.25	M	73125

نتوقف لأن جميع قيم صف Z موجبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل هو:

$$Z = 73125,\ X_1 = 300,\ X_2 = 775,\ S_2 = 105,\ S_3 = 285,\ S_5 = 595$$

ونُلاحظ أن قيم الحل الأمثل أعلاه تأكد ما تم الحصول عليه من استخدام طريقة الرسم السابقة.

سؤال (٢-٣)

يسعى مالك مزرعة لحل مشكلة الحمية وذلك باستخدام على الاقل 800 باون من الوجبة الغذائية اليومية الخاصة به، والتي هي خليط من طعام الذرة وحب الصويا بالتركيبة الآتية:

المادة الغذائية	المعلومات الغذائية لكل باون من المادة الغذائية		الكلف ($/باون)
	بروتين	ألياف	
الذرة Corn	0.09	0.02	0.30
حب الصويا Soybean	0.60	0.06	0.90

إن المتطلبات الغذائية للغذاء الخاص يجب أن يتضمن على الأقل 30% بروتين وعلى الأكثر 5% ألياف.

المطلوب: تحديد مزيج الغذاء الأمثل لتقليل التكاليف اليومية إلى إدنى حد مُمكن، وذلك باستخدام طريقة الرسم أولاً، ثم طريقة (Big-M) ثانياً.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد باونات الذرة الواجب إضافتها لمزيج الغذاء اليومي حيثُ $X_1 \geq 0$.

نفرض إن X_2 يُمثل عدد باونات حب الصويا الواجب إضافتها لمزيج الغذاء اليومي حيثُ $X_2 \geq 0$.

دالة الهدف: يتم صياغة دالة الهدف بالاعتماد على مجموع الكلف اليومية (بالدولار) الواجب تدنيتها إلى أدنى حد ممكن لمزيج الغذاء الأمثل على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 0.3 X_1 + 0.9 X_2$$

النموذج الرياضي: يجب أن يقرر المزارع الكمية اليومية المطلوبة لإن حاجته على الأقل 800 باون من الغذاء يومياً وفق القيد الآتي: $X_1 + X_2 \geq 800$.

أما بالنسبة إلى قيد متطلبات البروتين الغذائي فإن البروتين متوفر في X_1 من الذرة وX_2 من حب الصويا هي $(0.09X_1 + 0.6X_2)$ والتي يجب أن تكون على الأقل 30% من حصة مزيج الغذاء الأمثل الخاص بالمزارع $(X_1 + X_2)$ أي:

$$0.09X_1 + 0.6X_2 \geq 0.30\ (X_1 + X_2)$$

وعلى النحو نفسهِ نضع قيد متطلبات الألياف الغذائية والتي يجب أن تكون على الأكثر 5% بالشكل الآتي:

$$0.02X_1 + 0.06X_2 \leq 0.05\ (X_1 + X_2)$$

بعد تبسيط القيود السابقة يُمكن إعادة وضع الشكل النهائي لمسألة البرمجة الخطية لهذهِ المشكلة بالصيغة الآتية:

$$\text{Min. } Z = 0.3\ X_1 + 0.9\ X_2$$

Sub to

$$X_1 + X_2 \geq 800$$
$$0.21\ X_1 - 0.30\ X_2 \leq 0$$
$$0.03\ X_1 - 0.01\ X_2 \geq 0$$
$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

- **الحل باستخدام طريقة الرسم:** يتم تحديد إحداثيات كل قيد كما يأتي:

$X_1 + X_2 = 800$ ...(1)

X_1	X_2	
0	800	→ (0,800)
800	0	→ (800,0)

$0.21\ X_1 - 0.30\ X_2 = 0$ ...(2)

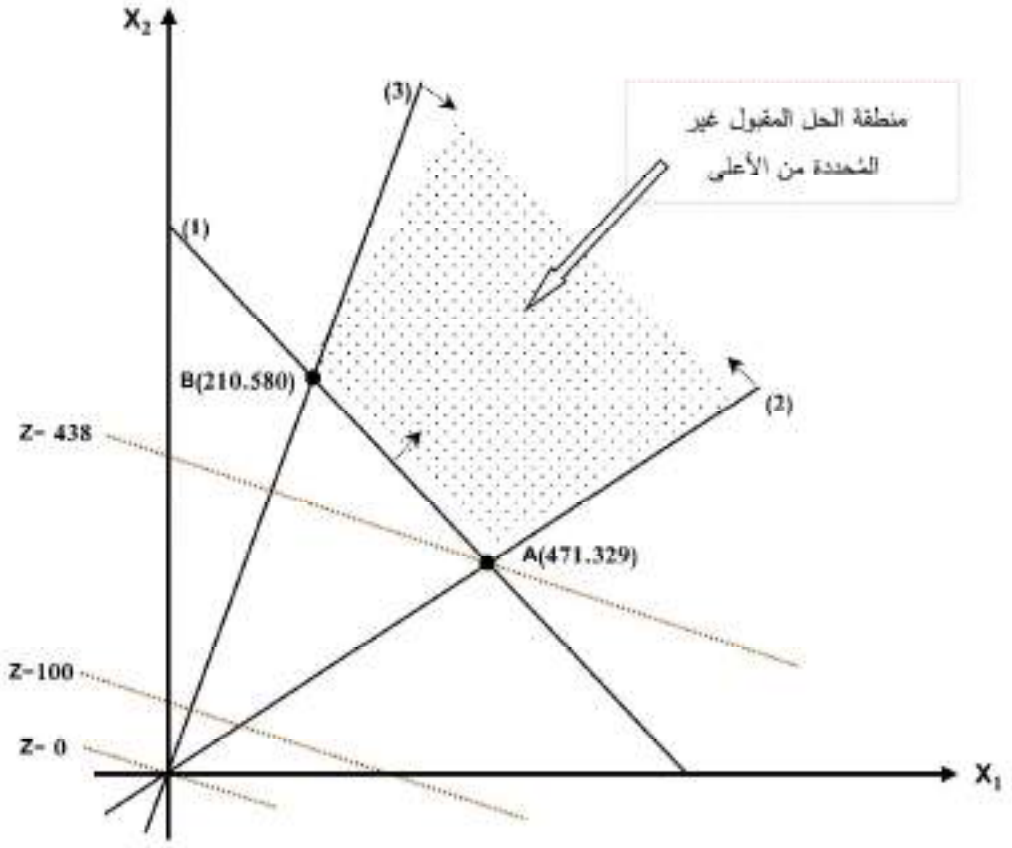
$\rightarrow X_1 = (0.30/0.21)\ X_2$

X_1	X_2
143	100
290	200
430	300
570	400

$0.03\ X_1 - 0.01\ X_2 = 0 \ldots(3) \rightarrow X_1 = (0.01/0.03)\ X_2$

X_1	X_2
33	100
67	200
100	300
133	400

بالنسبة للقيود المشابهة للقيدين الثاني والثالث أعلاه، فيفضل اتباع الاسلوب أعلاه لحساب النقاط التي نحتاجها لرسم ذلك القيد.



من الرسم أعلاه نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة غير المحددة من الأعلى ومحددة من الأسفل بالنقاط AB.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 0.3 X_1 + 0.9X_2$
A	(471,329)	438
B	(210,580)	585

Min. Z=438

وحيثُ إن دالة الهدف هي تدنية التكاليف اليومية إلى أدنى حد، فإن النقطة A تحقق أقل كلفة ممكن، وهذا ما نُلاحظة عند رسم دالة الهدف بالشكل الآتي:

Let $Z = 0$, Let $Z = 0.3X_1 + 0.9X_2 = 100$, Let $Z = 0.3X_1 + 0.9X_2 = 438$

X_1	X_2	
0	111	→ (0,111)
333	0	→ (333,0)

X_1	X_2	
0	487	→ (0,487)
1460	0	→ (1460,0)

بعد رسم دالة الهدف للقيم المُفترضة أعلاه، نُلاحظ أن أدنى نقطة تمر بها دالة الهدف هي النقطة (471,329) A وذلك يؤكد الحل الذي تم الحصول عليه بالأعتماد على النقاط.

- **الحل باستخدام طريقة** (Big-M): يفضل أعادة كتابة نموذج البرمجة الخطية الأصلي الآتي:

Min. $Z = 0.3 X_1 + 0.9 X_2$

Sub to

$$X_1 + X_2 \geq 800$$

$$0.21 X_1 - 0.30 X_2 \leq 0$$

$$0.03 X_1 - 0.01 X_2 \geq 0$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية والصناعية:

$$\text{Min. } Z - 0.3X_1 - 0.9X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_3 = 0$$

Sub to

$$X_1 + X_2 - S_1 + R_1 = 800$$

$$0.21X_1 - 0.30X_2 + S_2 = 0$$

$$0.03X_1 - 0.01X_2 - S_3 + R_3 = 0$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1, R_3 \geq 0$$

نُلاحظ إن شروط الصيغة القياسية غير متحققة مع المتغيرين R_1 و R_3 لأن معاملاتهما في دالة الهدف هي (M-) وليست صفر، ولكي نجعلها صفراً يتم ضرب القيد الأول والثالث بالقيمة (M+) ونجمعهما مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$Z - 0.3X_1 - 0.9X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_3 = 0$$

$$MX_1 + MX_2 - MS_1 + MR_1 = 800M$$

$$0.03MX_1 - 0.01MX_2 - MS_3 + MR_3 = 0$$

$$Z + (1.03M - 0.3)X_1 + (0.99M - 0.9)X_2 - MS_1 + 0S_2 - MS_3 + 0R_1 + 0R_3 - 800M$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_3	RHS	Ratio
R_1	1	1	−1	0	0	1	0	800	800
S_2	0.21	−0.03	0	1	0	0	0	0	0
R_3	0.03	−0.01	0	0	−1	0	1	0	0
Z	1.03M−0.3	0.99M−0.9	−M	0	−M	0	0	800M	

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_3	RHS	Ratio
R_1	0	2.43	−1	−4.76	0	1	0	800	329
X_1	1	−1.43	0	4.76	0	0	0	0	يهمل
R_3	0	0.03	0	−0.14	−1	0	1	0	0
Z	0	2.46M−1.33	−M	−4.9M+1.43	−M	0	0	800M	

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_3	RHS	Ratio
R_1	0	0	−1	5.8	73.91	1	−73.91	800	10.8
X_1	1	0	0	−1.45	−43.48	0	43.48	0	يهمل
X_2	0	1	0	−4.35	−30.43	0	30.43	0	يهمل
Z	0	0	−M	5.8M−4.4	73.9M−40.5	0	−73.9M+40.5	800M	

جدول الحل الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_3	RHS
S_3	0	0	−0.01	0.08	1	0.01	1	10.82
X_1	1	0	−0.59	1.96	0	0.59	0	470.59
X_2	0	1	−0.41	−1.96	0	0.41	0	329.41
Z	0	0	−0.26M−0.41	−1.12	0	0.74M+0.41	0	438.21

نتوقف لأن جميع قيم صف Z سالبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، ونُلاحظ من جدول الحل الأمثل أعلاه أن قيم الحل الأمثل هي X_1=470.59, X_2=329.41 و Z=438.21، وهذا يطابق ما تم الحصول عليه من استخدام طريقة الرسم السابقة.

سؤال (٢-٤)

يعمل مصرف الرشيد على سياسة منح قروض مصرفية بقيمة إجمالية 12 مليون دولار لقطاعات مختلفة كما موضح في الجدول إدناه:

نسبة القروض غير المنتجة Bad-debt ratio	الفائدة Interest rate	نوع القرض Type of load
0.10	0.140	شخصي Personal
0.07	0.130	سيارة Car
0.03	0.120	سكني Home
0.05	0.125	مزرعة Farm
0.02	0.100	تجاري Commercial

علماً أن القروض غير المنتجة لا يُمكن تحصيلها ولا تعطي أي مردود فائدي، وأن المنافسة مع الدوائر المالية الأخرى تتطلب من المصرف أن يخصص على الأقل 40% من المبالغ للقطاعات الزراعية والتجارية، وكمساعدة للقطاع السكني في المنطقة فأن على المصرف تخصيص على الأقل أو يساوي 50% من قيمة القروض الشخصية والسيارات والسكنية، وهناك سياسة يلتزم بها المصرف وهي أن لا تزيد القروض الغير منتجة عن 4% من إجمالي قيمة القروض.

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية أعلاه بطريقة السمبلكس.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل قيمة القروض الشخصية (بملايين الدولارات) حيثُ $X_1 \geq 0$.

نفرض إن X_2 يُمثل قيمة قروض السيارات (بملايين الدولارات) حيثُ $X_2 \geq 0$.

نفرض إن X_3 يُمثل قيمة قروض المزارع (بملايين الدولارات) حيثُ $X_3 \geq 0$.

نفرض إن X_4 يُمثل قيمة القروض التجارية (بملايين الدولارات) حيثُ $X_4 \geq 0$.

دالة الهدف: يهدف المصرف إلى زيادة عوائده الصافية عن طريق فوائد القروض الممنوحة، حيثُ إن الاختلاف بين الفوائد ونسبة القروض غير المنتجة هي أن الفوائد تهتم بالقروض الجيدة لأن 10% من القروض الشخصية تفقد على القروض غير المنتجة، ويستلم المصرف 90% فقط من إجمالي القروض الشخصية و 14% فائدة من ($0.90\ X_1$)، وبنفس الأسلوب نتعامل مع بقية أنواع القروض.

يتم صياغة دالة الهدف للفائدة الإجمالية بالاعتماد على المعطياة أعلاه وعلى النحو الآتي:

Total interest = $0.14\ (0.90\ X_1) + 0.13\ (0.93\ X_2) + 0.12\ (0.97\ X_3) + 0.125\ (0.95\ X_4) + 0.1\ (0.98\ X_5) = 0.126\ X_1 + 0.121\ X_2 + 0.116\ X_3 + 0.119\ X_4 + 0.098\ X_5$

We also have Bad debt = $0.1\ X_1 + 0.07\ X_2 + 0.03\ X_3 + 0.05\ X_4 + 0.02\ X_5$

حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

Max. Z = Total interest – Bad debt = $(0.126\ X_1 + 0.121\ X_2 + 0.116\ X_3 + 0.119\ X_4 + 0.098\ X_5) - (0.1\ X_1 + 0.07\ X_2 + 0.03\ X_3 + 0.05\ X_4 + 0.02\ X_5) = 0.026\ X_1 + 0.051\ X_2 + 0.086\ X_3 + 0.069\ X_4 + 0.078 X_5$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 5 قيود هي:

١. قيمة القرض الممنوح من قبل المصرف للقطاعات المختلفة لا يزيد عن 12 مليون دولار:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 12$$

٢. قيمة القروض للقطاعات الزراعية والتجارية تبلغ على الأقل 40% من إجمالي قيمة القروض:

$$X_4 + X_5 \geq 0.40\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

$$\rightarrow\ 0.4\ X_1 + 0.4\ X_2 + 0.4\ X_3 - 0.6\ X_4 - 0.6\ X_5 \leq 0$$

٣. قيمة القروض الشخصية والسيارات والسكنية تبلغ على الأقل 50% من إجمالي قيمة القروض:

$$X_3 \geq 0.50\ (X_1 + X_2 + X_3) \rightarrow\ 0.5\ X_1 + 0.5\ X_2 - 0.5\ X_3 \leq 0$$

٤. لا تزيد القروض غير المنتجة عن 4% من إجمالي قيمة القروض:

$$0.1 X_1 + 0.07 X_2 + 0.03 X_3 + 0.05 X_4 + 0.02 X_5 \leq 0.04 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

$$\rightarrow 0.06 X_1 + 0.03 X_2 - 0.01 X_3 + 0.01 X_4 - 0.02 X_5 \leq 0$$

٥. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z - 0.026 X_1 + 0.051 X_2 + 0.086 X_3 + 0.069 X_4 + 0.078 X_5$$

Sub. to

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &\leq 12 \\
0.4 X_1 + 0.4 X_2 + 0.4 X_3 - 0.6 X_4 - 0.6 X_5 &\leq 0 \\
0.5 X_1 + 0.5 X_2 - 0.5 X_3 &\leq 0 \\
0.06 X_1 + 0.03 X_2 - 0.01 X_3 + 0.01 X_4 - 0.02 X_5 &\leq 0 \\
X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية لكي يتم حل المسألة بواسطة طريقة السمبلكس كما يأتي:

$$\text{Max. } Z - 0.026X_1 - 0.051X_2 - 0.086X_3 - 0.069X_4 - 0.078X_5 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 - 0$$

Sub. to

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + S_1 &= 12 \\
0.4X_1 + 0.4X_2 + 0.4X_3 - 0.6X_4 - 0.6X_5 + S_2 &= 0 \\
0.5X_1 + 0.5X_2 - 0.5X_3 + S_3 &= 0 \\
0.06X_1 + 0.03X_2 - 0.01X_3 + 0.01X_4 - 0.02X_5 + S_4 &= 0 \\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	12	12
S_2	0.4	0.4	0.4	-0.6	-0.6	0	1	0	0	0	0
S_3	0.5	0.5	-0.5	0	0	0	0	1	0	0	يهمل
S_4	0.06	0.03	-0.01	0.01	-0.02	0	0	0	1	0	يهمل
Z	-0.026	-0.051	-0.086	-0.069	-0.078	0	0	0	0	0	

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	Ratio
S_1	0	0	0	2.5	2.5	1	-2.5	0	0	12	4.8
X_3	1	1	1	-1.5	-1.5	0	2.5	0	0	0	يهمل
S_3	1	1	0	-0.75	-0.75	0	1.25	1	0	0	يهمل
S_4	0.07	0.04	0	-0.005	-0.035	0	0.025	0	1	0	يهمل
Z	0.06	0.035	0	-0.198	-0.207	0	0.215	0	0	0	

جدول الحل الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
X_5	0	0	0	1	1	0.4	-1	0	0	4.8
X_3	1	1	1	0	0	0.6	1	0	0	7.2
S_3	1	1	0	0	0	0.3	0.5	1	0	3.6
S_4	0.07	0.04	0	0.03	0	0.014	-0.01	0	1	0.168
Z	0.06	0.035	0	0.009	0	0.083	0.008	0	0	0.9965

نتوقف لأن جميع قيم صف Z موجبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس هو:

$X_1 - X_2 - 0,\ X_3 - 7.2,\ X_4 - 0,\ X_5 - 4.8$ و $Z - 0.9965$.

مُلاحظة (٢-١٣): من النتائج أعلاه نُلاحظ أن المصرف قد قسم المبلغ 12 مليون دولار للقروض المختلفة، حيثُ خصص 7.2$ مليون للقروض السكنية (X_3=7.2) و 4.8$ مليون للقروض التجارية (X_5=4.8) مع إهمال بقية أنواع القروض لعدم امتلاكها مساهمة فعالة في دالة الهدف، ونُلاحظ أن معدل العائد يُحسب بالشكل:

$$\text{Rate of return} = \frac{Z}{12} = \frac{0.99648}{12} = 0.08034$$

حيثُ إن معدل العائد السنوي المشترك 8.034% وهو أقل من أفضل نسبة صافي فائدة (ويساوي 0.086 للقروض السكنية).

سؤال (٢-٥)

تمتلك عائلة مزرعة تقدر بـ(120) دونم من الأرض وتستثمر فيها مبلغ (14.5) مليون دينار، ويقوم أفراد هذهِ العائلة بالعمل (4100) ساعة في فصل الشتاء و(4300) ساعة خلال فصل الصيف، وفي حالة وجود فراغ في هذهِ الأوقات يقوم الأفراد بالعمل في مزرعة مجاورة مقابل (15) ألف دينار/ساعة خلال فصل الشتاء، و(25) ألف دينار/ساعة خلال فصل الصيف. دخل الأسرة يأتي من خلال زراعة ثلاث أنواع من المحاصيل هي (الباقلاء، الذرة، القمح) بالإضافة إلى تربية نوعين من الحيوانات هما (البقر، الدجاج). لا تحتاج زراعة المحاصيل الثلاثة إلى مبالغ مستثمرة، أما تربية الحيوانات فكل بقرة تحتاج إلى (400) ألف دينار وكل دجاجة تحتاج إلى (20) ألف دينار، وتحتاج كل بقرة أيضاً إلى (1.5) دونم من مساحة الأرض وإلى (100) ساعة عمل خلال فصل الشتاء، و(50) ساعة عمل خلال فصل الصيف، وفي المقابل تنتج البقرة دخلاً سنوياً (500) ألف دينار. أما بالنسبة للدجاج فكل دجاجة لا تحتاج إلى أي جزء من الأرض، وتحتاج إلى (0.6) من الساعة للعمل خلال الشتاء و(0.3) من الساعة للعمل خلال الصيف، علماً أن انتاج الدجاجة الواحدة سنوياً هو (30) ألف دينار، ويتسع المكان المخصص للدجاج (القفص) إلى (3000) دجاجة كحد أقصى، في حين حضيرة البقر تتسع إلى (32) بقرة كحد أقصى، وتقوم العائلة بزراعة ما لا يقل عن (60) دونم من الأرض، وتحتاج المحاصيل الثلاث إلى (20، 32، 10) ساعة عمل على التوالي خلال الشتاء، في حين إحتياجات فصل الصيف من ساعات العمل هي (50، 75، 40) ساعة على التوالي، وتحقق المحاصيل دخلاً سنوياً مقداره (1.75، 3، 1.2) مليون دينار على التوالي.

ترغب العائلة بزيادة أرباحها إلى أقصى حد ممكن، أكتب فقط النموذج الخطي للمسألة أعلاه.

الحل: قبل البدء بصياغة النموذج نعمل على تلخيص البيانات المتاحة لدينا في جداول لتسهيل الصياغة.

نوع الحيوان	تكلفة التربية (ألف دينار)	مساحة الأرض (دونم)	ساعات العمل في مزرعة العائلة		ربح سنوي (ألف دينار)	يتسع المكان كحد أقصى (حيوان)
			الشتاء	الصيف		
بقرة	400	1.5	100	50	500	32
دجاجة	20	---	0.6	0.3	30	3000

نوع المحصول	مساحة الأرض (دونم)	ساعات العمل في مزرعة العائلة		ربح سنوي (ألف دينار)
		الشتاء	الصيف	
باقلاء	1	20	40	1.75
ذرة	1	32	75	3
قمح	1	10	50	1.2
الحد الأقصى	60	4100	4300	

العمل في مزرعة	ساعات العمل في	
	الشتاء	الصيف
العائلة	4100	4300
مجاورة	١٥ ألف/ساعة	٢٥ ألف/ساعة

إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات): نفرض أن

X_1 يُمثل عدد البقرات التي يتم تربيتها في مزرعة العائلة حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2 يُمثل عدد الدجاج التي يتم تربيتها في مزرعة العائلة حيثُ $X_2 \geq 0$.

X_3 يُمثل عدد الدونمات المزروعة من محصول الباقلاء حيثُ $X_3 \geq 0$.

X_4 يُمثل عدد الدونمات المزروعة من محصول الذرة حيثُ $X_4 \geq 0$.

X_5 يُمثل عدد الدونمات المزروعة من محصول القمح حيثُ $X_5 \geq 0$.

X_6 يُمثل عدد ساعات الفراغ للعمل في المزرعة المجاورة شتاءاً حيثُ $X_6 \geq 0$.

X_7 يُمثل عدد ساعات الفراغ للعمل في المزرعة المجاورة صيفاً حيثُ $X_7 \geq 0$.

دالة الهدف: ترغب العائلة بزيادة أرباحها إلى أقصى حد مُمكن من خلال تربية الحيوانات، زراعة الأراضي التي تملكها ومن خلال الربح الذي تحصل عليه من العمل في المزرعة المجاورة، على هذا الأساس يُمكن صياغة دالة الهدف بالشكل الآتي:

$$\text{Max. } Z = 500000X_1 + 30000X_2 + 1750000X_3 + 3000000X_4 + 1200000X_5 + 15000X_6 + 25000X_7$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من:

قيد عدد الأبقار في الحضيرة	$X_1 \leq 32$
قيد عدد الدجاج في القفص	$X_2 \leq 3000$
قيد المساحة المتاحة لمزرعة العائلة	$1.5\,X_1 + 0\,X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 3000$
قيد المساحة المتاحة لزراعة المحاصيل الثلاثة	$X_3 + X_4 + X_5 \leq 60$
قيد ساعات العمل في فصل الشتاء	$100X_1 + 0.6X_2 + 20X_3 + 32X_4 + 10X_5 + X_6 \leq 4100$
قيد ساعات العمل في فصل الصيف	$50X_1 + 0.3X_2 + 40X_3 + 75X_4 + 50X_5 + X_7 \leq 4300$
قيد المبلغ المستثمر للتربية	$400000\,X_1 + 20000\,X_2 \leq 14500000$
قيد عدم السالبية	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$

سؤال (٢-٦)

تنتج شركة صدف للأثاث التركية نوعين من المنتجات الخشبية (طاولات وكراسي) وتمر عملية التصنيع بثلاث مراحل انتاجية (النجارة، الدهان، التجميع والتجهيز)، هنالك شرط تفرضه الشركة وهو أن يكون انتاج الكراسي يعادل على الاقل 4 أمثال ما يتم انتاجة من الطاولات، حددت الشركة الوقت الذي تحتاجه لإنهاء كل مرحلة انتاجية والوقت المتاح لديها والربح الذي تتوقعه للوحدة الواحدة (وحدة نقدية) من مساهمة كلا المنتجين في هدف الشركة بالجدول الآتي:

المنتجات / الأقسام الانتاجية	الطاولات	الكراسي	الزمن المتاح بالساعة
النجارة	2	1	40
الدهان	1	2	44
التجميع والتجهيز	3	2	50
الربح للوحدة الواحدة	20	10	

وبناء على هذه المعلومات فإن مدير الشركة يرغب بتحديد الكمية الواجب انتاجها من كلا المنتجين حتى يتحقق أقصى ربح ممكن.

المطلوب: تحديد مزيج الانتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن لتعظيم أرباح الشركة باستخدام طريقة الرسم أولاً، وطريقة (Big-M) ثانياً.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الطاولات حيثُ $X_1 \geq 0$.

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الكراسي حيثُ $X_2 \geq 0$.

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق أعلى ربح مُمكن من خلال بيع كلا المنتجين، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

$$\text{Max. } Z = 20 X_1 + 10 X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 4 قيود هي:

١. ثلاث قيود تخص الطاقة الزمنية للأقسام الانتاجية وهي:

$$2 X_1 + X_2 \leq 40$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 44$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 50$$

٢. قيد إنتاج الكراسي وهو أن يعادل عدد الكراسي على الاقل 4 أمثال ما يتم انتاجه من الطاولات:

$$X_2 \geq 4 X_1 \rightarrow -4 X_1 + X_2 \geq 0$$

٣. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 20 X_1 + 10 X_2$$

Sub to

$$2 X_1 + X_2 \leq 40$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 44$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 50$$

$$-4 X_1 + X_2 \geq 0$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

- **الحل باستخدام طريقة الرسم:** يتم تحديد إحداثيات كل قيد كالآتي:

$2X_1 + X_2 = 40$ ...(1)

X_1	X_2	
0	40	→ (0,40)
20	0	→ (20,0)

$X_1 + 2X_2 = 44$ ...(2)

X_1	X_2	
0	22	→ (0,22)
44	0	→ (44,0)

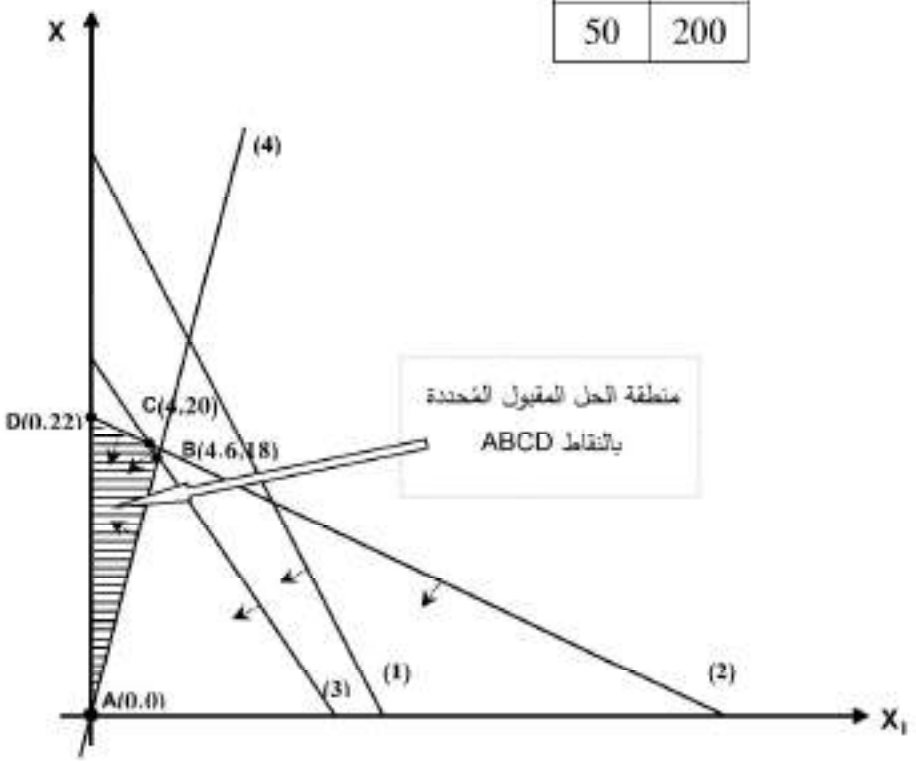
$3X_1 + 2X_2 = 50$ ...(3)

X_1	X_2	
0	25	→ (0,25)
17	0	→ (17,0)

$-4X_1 + X_2 = 0$ ...(4)

$\rightarrow X_1 = 0.25X_2$

X_1	X_2
6.25	25
12.5	50
25	100
50	200



من الرسم السابق نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط ABCD.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 20X_1 + 10X_2$
A	(0,0)	0
B	(4.6,18)	272
C	(4,19)	270
D	(0,22)	220

Max. Z=272

وحيثُ إن دالة الهدف هي تعظيم الأرباح إلى أعلى حد، فإن النقطة B تحقق أعلى ربح ممكن، وهي تعني أنهُ لتعظيم الأرباح يجب أن ننتج $X_1 = 4.6 \approx 5$ من الطاولات و $X_2 = 18$ من الكراسي لنحصل على الربح الأعظم وهو $Z = 272$ وحدة نقدية.

- **الحل باستخدام طريقة** (Big-M): يفضل إعادة كتابة نموذج البرمجة الخطية الأصلي الآتي:

$$\text{Max. } Z = 20X_1 + 10X_2$$

Sub to

$$2X_1 + X_2 \le 40$$
$$X_1 + 2X_2 \le 44$$
$$3X_1 + 2X_2 \le 50$$
$$-4X_1 + X_2 \ge 0$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية والصناعية لكي يتم حل المسألة بواسطة طريقة (Big–M) كما يأتي:

$$\text{Max. } Z - 20X_1 - 10X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + MR_4 = 0$$

Sub. to

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + S_1 &= 40 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 44 \\ 3X_1 + 2X_2 + S_3 &= 50 \\ -4X_1 + X_2 - S_4 + R_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, S_4, R_4 \geq 0$$

نُلاحظ إن شروط الصيغة القياسية غير متحققة مع المتغير R_4 لأن معامله في دالة الهدف هو (+M) وليس صفر، ولكي نجعله صفراً يتم ضرب القيد الرابع بالقيمة (–M) ونجمعه مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$\begin{aligned} &Z - 20X_1 - 10X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + MR_4 = 0 \\ &\quad 4MX_1 - MX_2 + MS_4 - MR_4 = 0 \\ &\text{---} \\ &Z + (4M-20)X_1 + (-M-10)X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MS_4 + 0R_4 = 0 \end{aligned}$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R_4	RHS	Ratio
S_1	2	1	1	0	0	0	0	40	40
S_2	1	2	0	1	0	0	0	44	22
S_3	3	2	0	0	1	0	0	50	25
R_4	-4	1	0	0	0	-1	1	0	0
Z	4M-20	-M-10	0	0	0	M	0	0	

في جدول الحل الأساسي المقبول الثاني يتم اختيار X_2 كمتغير داخل ليصبح متغيراً أساسياً محل المتغير الصناعي الخارج R_4، ونستمر على هذا الأسلوب حتى نصل لجدول الحل الأمثل بعد 5 دورات تكرارية (يترك إكمال الحل للطالب)، ونحصل على نتائج مطابقة لما تم الحصول عليه من طريقة الرسم السابقة.

سؤال (٢-٧)

ترغب الحكومة العراقية في إزالة بعض المناطق العشوائية في بغداد لتحل بدلاً عنها منازل حديثة، بالاضافة إلى زيادة عوائد الضريبة للدولة نتيجة فرض ضرائب عقارية وذلك يتضمن اتجاهين:

أ. هدم وأزالة المباني القديمة للامداد بالأراضي اللازمة لبناء منازل حديثة.

ب. بناء منازل حديثة.

والآتي تلخيص للمشكلة:

١. عدد المنازل التي يراد هدمها 300 منزل حيث يحتل كل منزل مساحة من الأرض 0.25 دونم.

٢. تكلفة الازالة للمنزل الواحد 2 مليون دينار.

٣. يجب ترك فراغات للتهوية والحدائق بمقدار 15% من المساحة المتاحة.

٤. عدد المنازل المكونة من غرفة واحدة تُمثل 20% على الأقل من إجمالي عدد المنازل.

٥. عدد المنازل المكونة من غرفتين تُمثل 10% على الأقل من إجمالي عدد المنازل.

٦. يجب أن تُمثل عدد الوحدات من نوع المبنى المكون من (3 أو4 غرف) 25% على الاقل من إجمالي العدد الكلي للمنازل.

٧. يتم التمويل عن طريق مصرف الرافدين بدعم من الحكومة على أن لا تزيد إجمالي التكاليف العامة عن 20 مليار دينار.

الجدول التالي يبين البيانات الخاصة بمساحة وكلفة كل منزل:

	المساحة (دونم)	تكلفة الانتاج (مليون دينار)	التحصيل الضريبي (ألف دينار)
الوحدة المكونة من غرفة	0.18	40	100
الوحدة المكونة من غرفتين	0.28	60	190
الوحدة المكونة من 3 غرف	0.40	110	270
الوحدة المكونة من 4 غرف	0.50	140	350

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة وذلك لتحديد عدد الوحدات الواجب إنشائها من كل نوع لتعظيم التحصيل الضريبي للدولة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدة المكونة من غرفــة حيثُ $X_1 \geq 0$.

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدة المكونة من غرفتيـن حيثُ $X_2 \geq 0$.

نفرض إن X_3 يُمثل عدد الوحدة المكونة من 3 غرف حيثُ $X_3 \geq 0$.

نفرض إن X_4 يُمثل عدد الوحدة المكونة من 4 غرف حيثُ $X_4 \geq 0$.

نفرض إن X_5 تُمثل فراغـات التهويــة والحدائــق حيـثُ $X_5 \geq 0$.

المساحة المتاحة من هدم وأزالة المباني القديمة = 300 منزل × 0.25 دونم = 75 دونم

المساحة المخصصة للوحدات السكنية = 75 دونم – (75 دونم × 0.15)= 63.75 دونم

المساحة المخصصة للتهوية والحدائق = 75 دونم – 63.75 دونم = 11.25 دونم

تكلفة إزالة المباني = 300 منزل × 2.000.000 دينار = 600.000.000 دينار

دالة الهدف $\text{Max. } Z = 100{,}000\ X_1 + 190{,}000\ X_2 + 270{,}000\ X_3 + 350{,}000\ X_4$

Sub. to

قيد مساحة الوحدات السكنية $0.18\ X_1 + 0.28\ X_2 + 0.40\ X_3 + 0.50\ X_4 \leq 63.75$

قيد مساحة التهوية والحدائق $X_5 \geq 11.25$

قيد التكلفة (مليون دينار) $40\ X_1 + 60\ X_2 + 110\ X_3 + 140\ X_4 + 600 \leq 20{,}000$

قيد عدد الوحدات السكنية:

$X_1 \geq 0.20\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$X_2 \geq 0.10\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$X_3 \geq 0.25\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$X_4 \geq 0.25\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

قيد عدم السلبية $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

يُمكن الحصول على الحل الأمثل بعد 9 دورات تكرارية لطريقة (Big-M) بالشكل الآتي:

$X_1 = 32.78,\ X_2 = 16.39,\ X_3 = 40.97,\ X_4 = 73.75,\ X_5 = 11.25$

أما قيمة دالة الهدف فهي بالمقدار $Z = 43264781.49$.

سؤال (٢-٨)

ينتج مصنع الأمل للدفاتر المدرسية والسجلات في أربيل ثلاثة منتجات (دفتر مدرسي، دفتر ملاحظات، مفكرة) وكل منتج يتم من خلال ثلاثة عمليات مختلفة، الزمن المستغرق (دقيقة) لانتاج وحدة واحدة من كل منتج والطاقة المتاحة لكل عملية (دقيقة/يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتج (ألف دينار) كانت كالآتي:

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	دفتر مدرسي	دفتر ملاحظات	مفكرة	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
الربح	0.75	0.45	1.35	

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعظيم الربح مع مراعاة:

- كل عملية لا تتجاوز الطاقة المتاحة لها.
- مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لا يزيد عن 180 دقيقة (أو 3 ساعة)/ يوم.
- إن دراسات السوق اشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من الدفاتر المدرسية إلى عدد الوحدات المنتجة من دفتر الملاحظات والمفكرة لا تقل عن 0.50.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من الدفتر المدرسي حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من دفتر الملاحظات حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض إن X_3 يُمثل عدد الوحدات المنتجة مـن المفكـرة حيـثُ $X_3 \geq 0$

دالة الهدف: يتم صياغة دالة الهدف بالاعتماد على الارباح التي يتم الحصول عليها من بيع المنتجات الثلاثة في السوق المفتوحة على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 0.75\,X_1 + 0.45\,X_2 + 1.35\,X_3$$

النموذج الرياضي: يجب أن تقرر الشركة ما هي كمية المنتجات التي يجب انتاجها من كل نوع من أنواع المنتجات الثلاثة بشكل يحقق أعظم ربح يومي وفق القيود الهيكلية الآتية:

- كل عملية انتاجية على حدا لا تتجاوز الطاقة المتاحة:

قيد الطاقة المتاحة للعملية الأولى $X_1 + 2\,X_2 + X_3 \leq 430$

قيد الطاقة المتاحة للعملية الثانية $3\,X_1 + 2\,X_3 \leq 460$

قيد الطاقة المتاحة للعملية الثالثة $4\,X_1 + 4\,X_2 \leq 420$

- مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لا تزيد عن 180 دقيقة (أو 3 ساعة)/ يوم:

$$430 - (X_1 + 2X_2 + X_3) + 460 - (3X_1 + 2X_3) + 420 - (4X_1 + 4X_2) \leq 180$$

$$\longrightarrow 8\,X_1 + 6\,X_2 + 3\,X_3 \geq 1130$$

- إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من الدفاتر المدرسية إلى عدد الوحدات المنتجة من دفتر الملاحظات والمفكرة لا تقل عن 0.50:

$$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \geq 0.50 \rightarrow \therefore X_1 - 0.50\,X_2 - 0.50X_3 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة دالة الهدف والقيود على النحو الآتي:

Max. $Z = 0.75\ X_1 + 0.45\ X_2 + 1.35\ X_3$

Sub. to

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430$$
$$3X_1 + 2X_3 \le 460$$
$$4X_1 + 4X_2 \le 420$$
$$8X_1 + 6X_2 + 3X_3 \ge 1130$$
$$X_1 - 0.50\ X_2 - 0.50\ X_3 \ge 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

يُمكن الحصول على الحل الأمثل بعد 8 دورات تكرارية لطريقة (Two-Phase) بالشكل الآتي:

$X_1 = 74.44 \approx 74$ دفتر مدرسي

$X_2 = 30.56 \approx 31$ دفتر ملاحظات

$X_3 = 118.33 \approx 118$ مفكرة

أما قيمة دالة الهدف فهي بالمقدار $Z=229.33$ ألف دينار.

سؤال (٢-٩)

يسعى قسم الصيانة لشركة Smart Taxi لتأجير السيارات التابعة لها في بغداد لحل مشكلة المولد الكهربائي (الدينمو) لسيارات الأجرة التي لديه، حيثُ يحتاج إلى الكميات التالية من المولدات الكهربائية للثلاثة أشهر القادمة:

الشهر	المولدات المطلوبة
1	125
2	165
3	215

وتستطيع الشركة أن تشتري مولد جديد بمبلغ 60 ألف دينار أو مولد مستعمل أعيد تجديده بواسطة شركة خارجية بمبلغ 40 ألف دينار، وفي الحالة الثانية تقوم الشركة الخارجية باستلام المولدات المستعملة في بداية الشهر وتُعيدها مجدده في بداية الشهر التالي، ولدى شركة الاجرة 120 مولد مستعمل في المخزن، غير إن هذهِ المولدات المستعملة لن يكون لها قيمة في نهاية الثلاثة أشهر وترغب الشركة (إن كان ممكناً) تجنب تخزين أي مولدات مستعملة.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة لكي تتمكن شركة الأجرة من خفض إجمالي تكاليف طلب المولدات خلال فترة الثلاثة أشهر.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد المولدات الجديدة التي اشتريت في الشهر الأول حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد المولدات الجديدة التي اشتريت في الشهر الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$

نفرض إن X_3 يُمثل عدد المولدات الجديدة التي اشتريت في الشهر الثالث حيثُ $X_3 \geq 0$

نفرض إن X_4 يُمثل عدد المولدات المستعملة التي ارسلت لتجديدها في الشهر الأول حيثُ

$$X_4 \geq 0$$

نفرض إن X_5 يُمثل عدد المولدات المستعملة التي ارسلت لتجديدها في الشهر الثاني حيثُ $X_5 \geq 0$

يُلاحظ إنه لا داعي لوجود X_6 حيثُ إن المولد الذي يُرسل للتجديد في بداية الشهر الثالث لن يعود للإستعمال في نفس الشهر (أي خارج حساب الثلاثة أشهر).

يُمكن كتابة دالة الهدف المطلوب تخفيضها على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 60 (X_1 + X_2 + X_3) + 40 (X_4 + X_5)$$

يُوجد نوعان من القيود في هذهِ المشكلة:

القيد الأول: المولدات المجددة التي تعود في بداية الشهر يضاف لها المولدات التي تُشترى خلال الشهر يجب إن تواجه طلبات هذا الشهر، وحيثُ إنهُ لا توجد مولدات مجددة في الشهر الأول فإن القيد هو $X_1 \geq 125$، وحيثُ إن X_4 وحدة من المولدات المجددة ستعود في بداية الشهر الثاني فإن طلبات هذا الشهر ستكون $X_2 + X_4 \geq 165$ وفي الشهر الثالث $X_3 + X_5 \geq 215$.

القيد الثاني: يتلخص في إن كمية المولدات المستعملة التي ترسل في بداية الشهر لا يُمكن أن تزيد على الكمية المتاحة في ذلك الوقت، وعلى ذلك فبالنسبة للشهر الأول $X_4 \leq 120$، كذلك فإنه خلال الشهر الأول ستكون $(120 - X_4)$ وحدة من المولدات المستعملة موجودة تحت يد الشركة بعد إرسال مجموعة من المولدات للتجديد، بالإضافة

إلى ذلك سيوجد 125 مولد ستصبح مستعملة خلال الشهر وعلى ذلك فالقيد الخاص بالشهر الثاني هو

$$X_5 \le 120 - X_4 + 125 \longrightarrow X_4 + X_5 \le 245$$

يُمكن الآن كتابة دالة الهدف والقيود على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 60X_1 + 60X_2 + 60X_3 + 40X_4 + 40X_5$$

Sub. to

$$X_1 \ge 125$$
$$X_2 + X_4 \ge 165$$
$$X_3 + X_5 \ge 215$$
$$X_4 \le 120$$
$$X_4 + X_5 \le 245$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$$

يُمكن الحصول على الحل الأمثل بعد 8 دورات تكرارية لطريقة (Big-M) بالشكل الآتي:

$X_1 = 125$ عدد المولدات الجديدة التي سيتم شراءها في الشهر الأول

$X_2 = 45$ عدد المولدات الجديدة التي سيتم شراءها في الشهر الثاني

$X_3 = 90$ عدد المولدات الجديدة التي سيتم شراءها في الشهر الثالث

$X_4 = 120$ عدد المولدات المستعملة التي سيتم ارسالها للتجديد في الشهر الأول

$X_5 = 125$ عدد المولدات المستعملة التي سيتم ارسالها للتجديد في الشهر الثاني

أما قيمة دالة الهدف فهي بالمقدار $Z=25400$ ألف دينار.

سؤال (٢-١٠)

يملك مستثمر 10.000$ يرغب باستثمارها في أربع مشاريع، الجدول إدناه يوضح المدفوعات والإيرادات للاستثمارات الأربع:

Project	Cash flow (1000$) at the start of				
	Year1	Year2	Year3	Year4	Year5
1	1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	-1.00	0.80	1.90	0.80
4	1.00	0.60	0.60	1.80	0.95

المعلومات في الجدول أعلاه يُمكن توضيحها بالصيغة الآتية:

- للمشروع الأول: 1.00$ تستثمر في بداية السنة الأولى، وسوف نحصل على 0.50$ و 0.30$ و 1.80$ و 1.20$ في بداية السنة الثانية والثالثة والرابعة والخامسة على التوالي، وبنفس الاسلوب يتم توضيح بقية استثمارات المشاريع الأربع.
- الإيرادات بالقيمة 0.00$ تشير إلى انهُ ليس هنالك تعاملات مصرفية.
- هنالك خيار إضافي آخر لهذا المستثمر وهو أن يستثمر أموالهُ في حسابات المصرف على أن يكسب 6.5% سنوياً.
- أي عوائد يتم الحصول عليها في نهاية كل سنة مالية يُمكن إعادة توضيفها للسنة التي تليها.

المطلوب: صياغة المسألة بشكل نموذج برمجة خطية لتحديد التخصيص الأمثل لزيادة الأموال المطلوب أستثمارها.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_i يُمثل كمية المبالغ (بالدولار) المستثمرة في المشروع i

حيثُ $X_i \geq 0,\ i=1,2,3,4$

نفرض إن Y_j يُمثل كمية المبالغ (بالدولار) المستثمرة في المصرف بالسنة j

حيثُ $Y_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5$

دالة الهدف: يهدف المستثمر إلى تحديد التخصيص الأمثل لزيادة أمواله المطلوب استثمارها، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

$$\text{Max. } Z = Y_5$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من 5 قيود هي:

١. قيد المبلغ الذي يرغب المستثمر باستثمارهِ وهو 10,000$ في السنة الأولى:

$$X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 + Y_1 \leq 10{,}000$$

٢. قيد المبالغ التي يرغب المستثمر باستثمارها في السنوات الأخرى:

$$0.5X_1 + 0.6X_2 - X_3 + 0.4X_4 + 1.065Y_1 - Y_2 = 0$$

$$0.3X_1 + 0.2X_2 + 0.8X_3 + 0.6X_4 + 1.065Y_2 - Y_3 = 0$$

$$1.8X_1 + 1.5X_2 + 1.9X_3 + 1.8X_4 + 1.065Y_3 - Y_4 = 0$$

$$1.2X_1 + 1.3X_2 + 0.8X_3 + 0.95X_4 + 1.065Y_4 - Y_5 = 0$$

٣. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = Y_5$$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_4 + Y_1 \le 10{,}000$$

$$0.5X_1 + 0.6X_2 - X_3 + 0.4X_4 + 1.065Y_1 - Y_2 = 0$$

$$0.3X_1 + 0.2X_2 + 0.8X_3 + 0.6X_4 + 1.065Y_2 - Y_3 = 0$$

$$1.8X_1 + 1.5X_2 + 1.9X_3 + 1.8X_4 + 1.065Y_3 - Y_4 = 0$$

$$1.2X_1 + 1.3X_2 + 0.8X_3 + 0.95X_4 + 1.065Y_4 - Y_5 = 0$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \ge 0$$

يُمكن الحصول على الحل الأمثل بعد 9 دورات تكرارية لطريقة (Two-Phase) بالشكل الآتي:

X_1=0, X_2=10000\$, X_3=6000\$, X_4=0, Y_1=0, Y_2=0, Y_3=6800\$, Y_4=33676\$, Y_5=53833.32\$

أما قيمة دالة الهدف فهي بالمقدار Z=53833.32\$ (تعني Z هنا القيمة المتاحة للاستخدام عند بداية السنة الخامسة).

سؤال (٢-١١)

يتوفر لإحدى شركات نقل المسافرين العراقية أربعة أنواع من الحافلات (مرسيدس، ألبا، Man، ميتسوبيشي) تعمل على (5) خطوط رئيسية في العراق، ترغب الشركة في تحديد العدد الأمثل لكل نوع من الحافلات يومياً، وقد توفرت لدى الشركة المعلومات الآتية:

نوع الحافلة	1	2	3	4
الطاقة الاستيعابية	44	45	40	46
عدد الحافلات المتوفرة	8	10	7	6

عدد الرحلات اليومية لكل نوع / خط	1	2	3	4	العدد المتوقع للمسافرين يومياً
1	4	3	3	2	350
2	2	4	1	2	200
3	3	2	2	3	250
4	2	1	2	2	400
5	3	3	2	2	425

أما تكاليف (التشغيل والإدارة والصيانة ... الخ) لكل نوع / خط فكانت كالآتي:

نوع الحافلة / التكاليف لكل رحلة (بالدينار)	1	2	3	4
1	3000	4000	5000	3000
2	2500	3000	3000	4000
3	5000	6000	3000	4000
4	6000	7000	4000	5000
5	4000	5000	2000	4000

الحل: نفرض أن X_{ij} تمثل عدد الحافلات من النوع i المخصصة للعمل على الخط j حيث أن i=1,2,3,4 وأن j=1,2,3,4,5 ، أما دالة الهدف فهي بالشكل الآتي:

$$\text{Min. } X_0 = 3000\ (4X_{11}) + 2500\ (2X_{12}) + 5000\ (3X_{13}) + 6000\ (2X_{14}) + 4000\ (3X_{15}) + 4000\ (3X_{21}) + \ldots + 4000\ (2X_{45})$$

Sub. to

قيود عدد الحافلات المستخدمة $\sum_{j=1}^{5} X_{1j} \le 8, \sum_{j=1}^{5} X_{2j} \le 10, \sum_{j=1}^{5} X_{3j} \le 7, \sum_{j=1}^{5} X_{4j} \le 6$

قيود عدد المسافرين

$$44(4X_{11}) + 45(3X_{21}) + 40(3X_{31}) + 46(2X_{41}) \le 350$$
$$44(2X_{12}) + 45(4X_{22}) + 40(X_{32}) + 46(2X_{42}) \le 200$$
$$44(3X_{13}) + 45(2X_{23}) + 40(2X_{33}) + 46(3X_{43}) \le 250$$
$$\vdots$$
$$44(2X_{14}) + 45(X_{24}) + 40(2X_{34}) + 46(2X_{44}) \le 400$$
$$44(3X_{15}) + 45(3X_{25}) + 40(2X_{35}) + 46(2X_{45}) \le 425$$

قيود عدم السلبية $X_{ij} \ge 0$

سؤال (٢-١٢): أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Primal	Primal in algebric form	Dual variables
Min. $Z = 10X_1 + 42X_2$	Min. $Z = 10X_1 + 42X_2 + 0X_3 + 0X_4$	
Sub. to	Sub. to	
$4X_1 + 5X_2 \ge 53$	$4X_1 + 5X_2 + X_3 + 0X_4 = 53$	Y_1
$X_1 + 6X_2 \ge 18$	$X_1 + 6X_2 + 0X_3 + X_4 = 18$	Y_2
$X_1, X_2 \ge 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$	

Dual Problem:

Max. $W = 53Y_1 + 18Y_2$

Sub. to

$$4Y_1 + Y_2 \leq 10$$
$$5Y_1 + 6Y_2 \leq 42$$
$$Y_1 \geq 0$$
$$Y_2 \geq 0$$

سؤال (٢-١٣)

تقوم شركة المصابيح الكهربائية المتميزة المحدودة في السعودية بانتاج نوعين من المصابيح الكهربائية هما المصباح الزئبقي والمصباح العادي، يمر المنتج بثلاثة أقسام أثناء عملية التصنيع هي: قسم التحضير، قسم التركيب وقسم الإنهاء، الجدول التالي يبين لنا المعلومات حول حاجة هذين النوعين من ساعات العمل في الأقسام المختلفة والطاقة المتاحة في كل قسم خلال الأسبوع الواحد:

القسم / المنتج	تحضير Y_1	تركيب Y_2	إنهاء Y_3	الربح
مصباح زئبقي X_1	2	4	3	7
مصباح عادي X_2	1	3	2	5
الطاقة المتاحة	100	135	150	

وبناء على هذه البيانات فإن مدير الشركة يرغب بتحديد الكمية الواجب انتاجها من كلا المنتجين حتى يتحقق أقصى ربح ممكن.

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بصيغتها الأولية والثنائية.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المصباح الزئبقي حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المصباح العادي حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق أعلى ربح مُمكن من خلال بيع كلا المنتجين، حيثُ يُمكن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 7X_1 + 5X_2$$

Sub to

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 135$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 150$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

- **الحل باستخدام طريقة الرسم:** يتم تحديد إحداثيات كل قيد كالآتي:

$2X_1 + X_2 = 100$ ...(1)

X_1	X_2	
0	100	→ (0,100)
50	0	→ (50,0)

$4X_1 + 3X_2 = 135$ ...(2)

X_1	X_2	
0	45	→ (0,45)
33.75	0	→ (33.75,0)

$3X_1 + 2X_2 = 150$ ...(3)

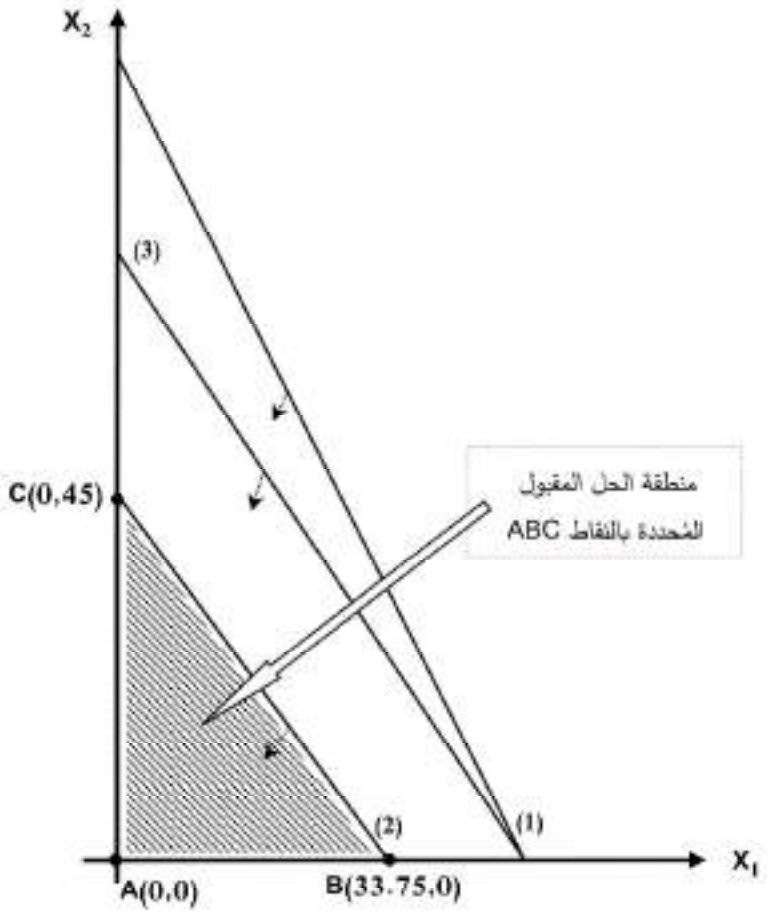
X_1	X_2	
0	75	→ (0,75)
50	0	→ (50,0)

من الرسم التالي نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط ABC.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 7 X_1 + 5 X_2$
A	(0,0)	0
B	(33.75,0)	236.25
C	(0,45)	225

Max. Z=236.25

وحيثُ إن دالة الهدف هي تعظيم الأرباح إلى أعلى حد، فإن النقطة B تحقق أعلى ربح ممكن، وأن $X_1 = 33.75$ و $X_2 = 0$ لنحصل على الربح الأعظم وهو $Z = 236.25$.



- **الحل باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex):** يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية لكي يتم حل المسألة بواسطة طريقة السمبلكس كما يأتي:

$$\text{Max. } Z - 7X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

Sub to

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 100$$
$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 135$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_3 = 150$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

B.V. \ All	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	2	1	1	0	0	100	50
S_2	4	3	0	1	0	135	33.75
S_3	3	2	0	0	1	150	50
Z	-7	-5	0	0	0	0	

جدول الحل الأساسي الأمثل

B.V. \ All	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
S_1	0	-1/2	1	-1/2	0	32.5
X_1	1	3/4	0	1/4	0	33.75
S_3	0	-1/4	0	-3/4	1	48.75
Z	0	1/4	0	7/4	0	236.25

حيثُ نُلاحظ أن الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس هو $X_1 = 33.75, X_2 = 0$ و $Z=236.25$.

أما لحل المشكلة الثنائية لهذهِ المسألة فأننا نقوم بعكس الأسطر لتصبح أعمدة ونعكس الأعمدة لتصبح أسطر وبالتالي تتغير أشكال المتراجحات وتعكس أيضاً دالة الهدف (وهي الطريقة الثنائية في الحل) لتصبح لدينا كما يأتي:

المنتج / القسم	مصباح زئبقي X_1	مصباح عادي X_2	الطاقة المتاحة
تحضير Y_1	2	1	100
تركيب Y_2	4	3	135
إنهاء Y_3	3	2	150
الربح	7	5	

حيثُ يُمكن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Min. } W = 100\,Y_1 + 135\,Y_2 + 150\,Y_3$$

Sub to

$$2\,Y_1 + 4\,Y_2 + 3\,Y_3 \geq 7$$

$$Y_1 + 3\,Y_2 + 2\,Y_3 \geq 5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

بنفس الأسلوب السابق يُمكن استخدام طريقة (Two Phase) أو (Big-M) لحل المسالة أعلاه، وفي حالة استخدام طريقة (Two Phase) فإننا سوف نحصل على الحل الأمثل بعد 5 دورات تكرارية للحل بالمقدار $Y_1 = 0, Y_2 = 1.75, Y_3 = 0$ و $Z = 236.25$ (نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف للصيغة الثنائية لم تتغير عن قيمتها في الصيغة الأولية).

سؤال (٢-١٤)

تقوم شركة HYSOON لانتاج المعدات الزراعية الصغيرة بإنتاج نوعين من المعدات β و α، إن الشركة تحقق ربحاً قدرهُ 350$ و 200$ للوحدة الواحدة من المنتجات β و α على التوالي، علماً بإن الشركة تحتاج إلى 12 و 15 ساعة لانتاج وحدة واحدة من المنتجات β و α على التوالي، وإن الوقت الاجمالي المسموح للعمل بهِ سنوياً 1200 ساعة، كما إن الطلبات التي يُمكن توقعها على المنتجين يتوقف على قدرة الشركة على الانتاج ولكن هناك إمكانية إنتاج كمية من β لا تزيد عن 40 وحدة، والكمية المنتجة من α أيضاً لا تزيد عن 30 وحدة في السنة.

المطلوب: تحديد العدد الأمثل من الوحدات المنتجة من كل نوع بحيث نعظم أرباح الشركة عن إنتاجها السنوي.

الحل: لصياغة النموذج الخطي يجب وضع الفرضيات الآتية:

نفرض X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول β حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني α حيثُ $X_2 \geq 0$

Max. $Z(x) = 350\ X_1 + 200\ X_2$ (دالة الهدف)

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$12\ X_1 + 15\ X_2 \leq 1200$ ..... قيد ساعات الانتاج

$X_1 \leq 40$ ..... قيد كمية انتاج β

$X_2 \leq 30$ ..... قيد كمية انتاج α

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

ملاحظة: يترك للطالب حل مسألة البرمجة الخطية أعلاه بطريقة الرسم أو السمبلكس.

تمارين الفصل الثاني

تمرين (٢-١)

تقوم الشركة الهندسية للإنشاءات المعدنية في القاهرة على تصنيع هياكل معدنية للجسور ولأعمال البناء وتصنع مواد جاهزة للتركيب والبناء، الشبكات الحديدية، غرف معدنية جاهزة، وغيرها. لدى هذه الشركة ثلاث مخازن لتخزين المنتجات الجاهزة، ومنها تنقل إلى ميادين العمل والتركيب المباشر، تتعامل الشركة مع ثلاث شركات محلية للتوزيع، وتقوم بنقل المواد الجاهزة من المخازن إلى العملاء الثلاثة.

تكلفة النقل يبينها جدول (٢-٥)، أما جدول (٢-٦) فيبين كمية السلع المنقولة إلى كل من العملاء الثلاثة، حيثُ يحتاج العميل الأول على الأقل إلى 15 وحدة، وإحتياجات العميل الثاني 19 وحدة على الأكثر، في حين يحتاج الثالث إلى 16 وحدة على الأقل.

المطلوب: بناء النموذج الخطي للمسألة بهدف تحقق أقل تكلفة ممكنه لنقل السلع من المخازن الثلاثة إلى مواقع العمل والتركيب.

جدول (٢-٥)

العميل	المخزن		
	1	2	3
1	9	12	5
2	7	6	8
3	5	4	10
المجموع	21	22	23

جدول (٢-٦)

عدد الوحدات المطلوبة لكل مخزن	العميل		
	1	2	3
1	2	3	1
2	1	2	4
3	1	1	1
ما يحتاجة	على الأقل 15	على الأكثر 19	على الأقل 16

تمرين (٢-٢)

تسعى شركة Samsung السعودية لزيادة الحد الأعلى من أرباحها من خلال انتاج محدد لشاشات التلفزيون والحاسوب، والتي تمر بمرحلتين انتاجيتين هما (توصيل الدوائر الكهربائية، اختبار صلاحية المنتج)، حيثُ تتطلب هذهِ المراحل عدد من الساعات بالشكل الآتي:

نوع المنتج / المرحلة الانتاجية	شاشات		عدد الساعات المتاحة
	التلفزيون	الحاسوب	
توصيل الدوائر الكهربائية	1.5	2.25	125
أختبار صلاحية المنتج	0.30	0.50	85
الربح المتحصل من بيع كل وحده / $	150	215	

المطلوب: بناء النموذج الخطي للمسألة بهدف تحقق أعلى ربح ممكن لانتاج الشاشات وفق الامكانات المتاحة للشركة.

تمرين (٢-٣)

أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Max. $Z = 5X_1 + 4X_2$

Sub. to

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$
$$6X_1 + 3X_2 \leq 22.5$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$-X_1 + X_2 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

تمرين (٢-٤)

أعد حل مثال (٢-١) باستخدام طريقة الرسم والطريقة المبسطة (Simplex).

تمرين (٢-٥)

أعد حل مثال (٢-٢) باستخدام أسلوب (Big-M)، حيثُ يُمكن الحصول على الحل الأمثل بعد 7 دورات تكرارية لطريقة (Big-M) بالشكل الآتي:

$X_1 = 400,\ X_2 = 850,\ X_3 = 150$

أما قيمة دالة الهدف فهي بالمقدار $Z = 3950$ ألف دينار.

تمرين (٢-٦)

أعد حل مثال (٢-٣) باستخدام أسلوب (Two-Phase) وقارن النتائج مع ما تم التوصل إليه في مثال (٢-١١).

تمرين (٢-٧)

أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Max. $Z = 2X_1 + 3X_2 - 2$

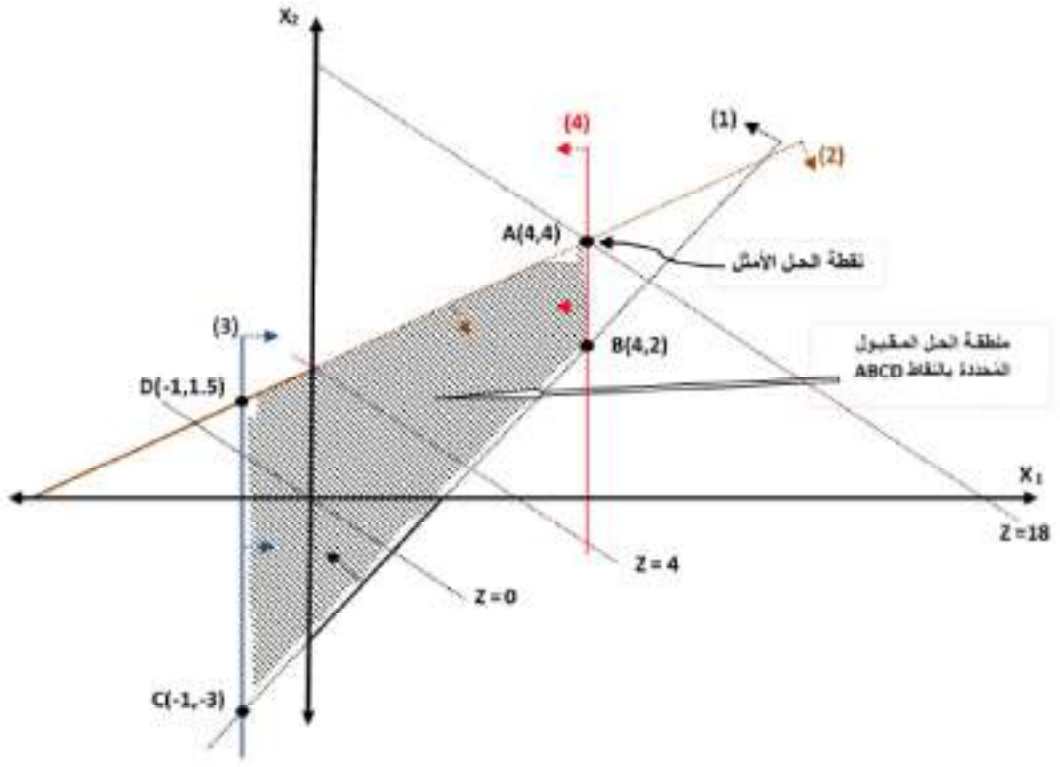
Sub. to

$$X_1 - X_2 \leq 2$$
$$-X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$-X_1 \leq 1$$
$$X_1 \leq 4$$

X_1, X_2 are Unrestricted in sign

مساعدة: يتم رسم قيود المسألة الأربع لتحديد منطقة الحل المقبول في الأرباع الأربعة وذلك لإن قيد عدم السلبية يسمح بالعمل في الأرباع الأربع، ثم تحديد نقطة أو نقاط الحل الأمثل من الرسم.

نُلاحظ في الشكل البياني التالي إن منطقة الحل المقبول هي ABCD، وأن نقطة الحل الأمثل هي A(4,4) حيثُ X_1-4، X_2-4 و Z-18، وأن دالة الهدف تمر بأعلى نقطة فيها وهي A وتجعل قيمة دالة الهدف في نهايتها العظمى.



تمرين (٢-٨)

أوجد الحل الأمثل بالطريقة المبسطة (Simplex) لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Max. $Z = X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4$

Sub. to

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 5X_4 \leq 4$$
$$5X_1 - 2X_2 + 6X_4 \leq 8$$
$$2X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 3X_4 \leq 3$$
$$-X_1 + X_3 + 2X_4 \leq 0$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

تمرين (٢-٩): أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الأتية:

Min. $Z = 20X_1 + 3X_2 + 19X_3$

Sub. to

$$X_1 + 5X_2 - X_3 \geq 15$$
$$2X_1 - 6X_2 + 4X_3 \leq 260$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

تمرين (٢-١٠)

أعد حل مثال (٢-٤) باستخدام اسلوب (Big-M).

تمرين (٢-١١)

أعد حل مثال (٢-٥) باستخدام اسلوب (Big-M).

تمرين (٢-١٢)

استخدام اسلوب (Two-Phase) لإيجاد الحل الأمثل للنموذج الآتي:

Min. $Z = 3X_1 + 8X_2 + X_3$

Sub. to

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$$

$$6X_1 + 4X_2 = 12$$

$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

تمرين (٢-١٣)

١) أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم والطريقة المبسطة (Simplex) للنموذج التالي وبين نوع ذلك الحل:

Max. $Z = 8X_1 + 6X_2$

Sub. to

$$X_1 + 3X_2 \leq 2$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$2X_1 \leq 1$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

٢) أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم للنموذج أعلاه في حالة تغيير القيد الثاني فقط إلى الشكل $6X_1 + 2X_2 \leq 3$.

تمرين (٢-١٤)

أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Min. $Z = 3X_1 + 8X_2$

Sub. to

$$X_1 + X_2 \geq 8$$
$$2X_1 - 3X_2 \leq 0$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 30$$
$$3X_1 - X_2 \geq 0$$
$$X_1 \leq 10$$
$$X_2 \geq 9$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

تمرين (٢-١٥)

أوجد المشكلة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Max. $Z = 5X_1 + 6X_2$

Sub. to

$$X_1 + 2X_2 = 5$$
$$-X_1 + 5X_2 \geq 3$$
$$4X_1 + 7X_2 \leq 8$$
$$X_1 \text{ unrestricted in sign}, X_2 \geq 0$$

تمرين (٢-١٦)

أعد حل مثال (٢-٦) باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex).

تمرين (٢-١٧)

أعد حل مثال (٢-٧) باستخدام طريقة الرسم.

تمرين (٢-١٨)

أعد حل مثال (٢-٢٠) باستخدام اسلوب (Big-M)، مع افتراض قيمة كبيرة بدلاً عن M ولتكن (M=100) لتوضيح السبب والمغزى من تسمية هذهِ الطريقة بهذا الأسم.

الفصل الثالث

نماذج النقل Transportation Models (T.M.)

٣-١ مقدمة Introduction

تُعالج نماذج النقل، عمليات توزيع البضائع في العديد من نقاط العرض (Destinations) (وقد تُدعى المصادر أو الأصول مثل المصنع) إلى عدد من نقاط الطلب (Sources) (وقد تُدعى محطات الوصول أو مراكز التصريف والتوزيع مثل السوق)، وعادةً فإن كمية السلع المتوفرة في كل مكان عرض (مصنع) والسلع المطلوبة في كل مكان طلب (سوق) تكون محدودة[١].

إن الغرض الأكثر شيوعاً من معالجة مشكلة النقل هو وضع الجدول الزمني لعمليات الشحن المرسلة من نقاط المصادر إلى نقاط التصريف، مع الإبقاء على تكاليف الإنتاج والنقل عند الحد الإدنى، وفي بعض الحالات، يحتوي نموذج النقل على هدف تعظيم الربح الإجمالي للبضائع المنقولة من المصدر إلى محطة الوصول.

وتستخدم نماذج النقل أيضاً عندما تحاول شركة أو مصنع أن تحدد المكان الذي تقيم فيه مرفقاً جديداً، إذ إن من المستحسن قبل افتتاح مخزن جديد أو مصنع أو مكتب، أن تأخذ الشركة في اعتبارها عدداً من المواقع البديلة، إذ إن من القرارات الجيدة

---

(١) باري رندر، ورالف ستير، وناجراج بالاكريشان، تعريب: مصطفى مصطفى موسى، تقديم: يحيى عبد العظيم المشد، (٢٠٠٧)، "نمذجة القرارات وبحوث العمليات – باستخدام صفحات الأنتشار الألكترونية (على الحاسب الآلي)"، دار المريخ للنشر، السعودية، ص ٢٧٧.

التي تتخذ في تمويل إقامة مرفق جديد، أن تشتمل هذهِ القرارات على الوصول بتكاليف الإنتاج الإجمالية والنقل إلى الحد الأدنى بالنسبة للنظام بكاملة.

تعتبر مشكلة النقل من أبرز المشاكل الاقتصادية التي تواجه المنشآت على اختلاف أنواعها سواء كانت منشآت صناعية أو خدمية، وذلك لأن تكاليف النقل تشكل عنصراً مهما من مجموع التكاليف التي تتحملها المنشأة جراء إيصال السلعة إلى المستهلك النهائي، ولهذا فإن معظم المنشآت قامت بوضع خطط سليمة ترمي من خلالها إلى إيجاد أفضل نموذج لكيفية توزيع البضاعة، أي تحديد البضاعة التي تنقل من كل المخازن إلى كل المراكز بأقل تكلفة.

٣-٢ الصيغة العامة لنموذج النقل

General formulation of the transportation model

من الطبيعي أن وضع الخطط على أسس سليمة لمعالجة المشكلات المتعلقة بالنقل يتطلب استخدام الأساليب الكمية، فإذا افترضنا أن لدينا m من المصادر (Sources) ملزمة بتجهيز n من مراكز التوزيع (Destinations) بسلعة معينة وبكمية حسب طلبها وأن:

X_{ij} : number of units shipped from source **i** to destination **j** where ($X_{ij} \geq 0$).

وهي تُمثل عدد الوحدات التي يتم نقلها من المصدر i الى مركز التوزيع j (يشترط منطقياً أن تكون الكمية المنقولة أكبر من أو تساوي صفر).

C_{ij} : the transportation cost per unit for transporting the units from source **i** to destination **j**.

وهي تُمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة التي يتم نقلها من المصدر i الى مركز التوزيع j.

S_i : quantity available at source i. الكمية المتاحة عند المصدر (i)

D_j : quantity required at destination j. الكمية المطلوبة عند مركز التوزيع (j)

يُمكن وضع جميع البيانات أعلاه في جدول (٣-١) التالي والذي يوضح جدول مشكلة النقل بصيغتها العامة[١] [٢]:

Destinations / Sources	1	2	3	...	n	SUPPLY S_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}		c_{1n} x_{1n}	S_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}		c_{2n} x_{2n}	S_2
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}		c_{3n} x_{3n}	S_3
⋮						⋮
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}		c_{mn} x_{mn}	S_m
DEMAND D_j	D_1	D_2	D_3		D_n	$\sum S_i = \sum D_j$

جدول (٣-١) يوضح الشكل العام لمشاكل النقل

أي أن الكمية المنقولة من المصدر i لا يُمكن أن تزيد عن العرض المتاح في ذلك المصدر وأن الكمية المنقولة إلى الموقع j يجب أن لا تزيد عن حاجة ذلك الموقع، ولتحقيق حالة التوازن نحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

---

(1) Tommi Sottinen, **Op. Cit.**, p. 172.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، (٢٠٠٩)، "بحوث العمليات في المحاسبة"، منشورات جامعة القاهرة، ص ٨.

عندها يكون الحل المقبول للمشكلة معرفاً، أي أن عدد الوحدات التي يتم نقلها من جميع المصادر والتي تدعى بكمية العرض (Supply) تكون مساوية لعدد الوحدات التي يتم توزيعها إلى جميع مراكز الاستهلاك والتي تدعى بكمية الطلب (Demand)، وبخلافه عند عدم تحقق شرط الاتزان يتم تعديل المشكلة بإضافة مصدر أو مركز توزيع وهمي، فإذا كان مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب يُضاف موقع وهمي تكون تكاليفه مساوية للصفر أي يمتص الفرق بين العرض والطلب، أما إذا كان الطلب أكبر من العرض فيضاف مصدر وهمي تكون تكاليفه مساوية للصفر يمتص الفرق بين العرض والطلب.

يُمكن كتابة النموذج الرياضي لمشكلة النقل باستخدام رمز المجموع بالشكل الآتي[1] [2]:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad (i = 1,2,...,m) \text{ Sources Const.}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad (j = 1,2,...,n) \text{ Destinations Const.}$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n)$$

ويُمكن أعادة كتابة النموذج الرياضي لمشكلة النقل بشكل نموذج برمجة خطية بالشكل الآتي[1]:

---

(١) راهي، عبد الرحيم خلف، وابراهيم، سميرة خليل، (٢٠٠٨)، "استخدام أساليب الأمثلية لحل مشكلة النقل (دراسة تطبيقية)"، مجلة العلوم الإقتصادية والأدارية، المجلد ١٤/٥٠، ص ٢٥٦.

(٢) الفضل، مؤيد عبد الحسين، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢٦.

$$\text{Min. } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + \ldots + C_{ij}X_{ij} + \ldots + C_{nm}X_{nm}$$

s.t.

$$C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + \ldots + C_{1n}X_{1n} = S_1$$
$$C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + \ldots + C_{2n}X_{2n} = S_2$$
$$\vdots$$
$$C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + C_{m3}X_{m3} + \ldots + C_{mn}X_{mn} = S_m$$

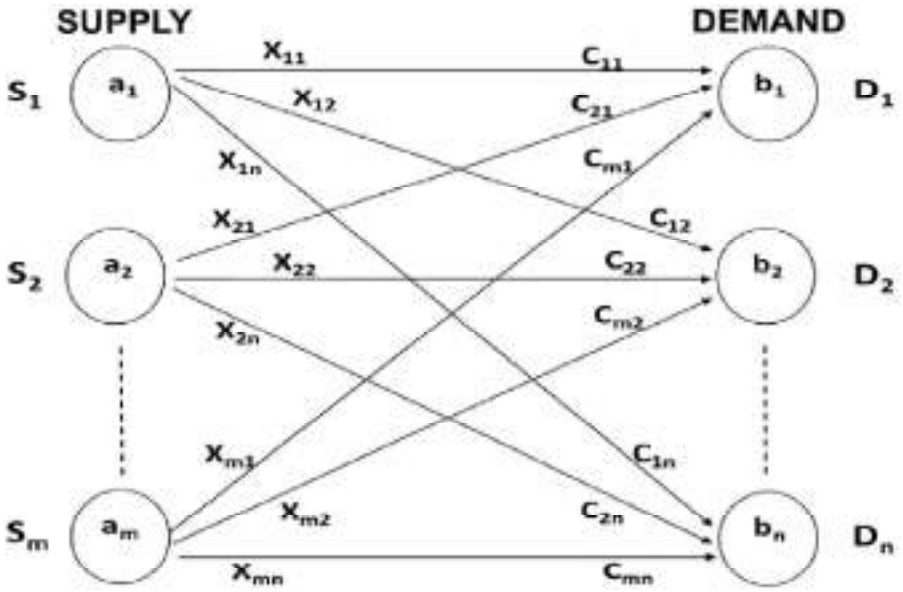
$$C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{31}X_{31} + \ldots + C_{m1}X_{m1} = D_1$$
$$C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + \ldots + C_{m2}X_{m2} = D_2$$
$$\vdots$$
$$C_{1n}X_{1n} + C_{2n}X_{2n} + C_{3n}X_{3n} + \ldots + C_{mn}X_{mn} = D_n$$
$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{mn} \geq 0$$

نُلاحظ أنه من الممكن اعتماد طريقة السمبلكس المبسطة لحل النموذج أعلاه كونه نموذج برمجة خطية يحقق جميع شروط النموذج الخطي.

شكل (٣-١) التالي يوضح نموذج الشبكة لمشاكل النقل والذي يتضمن (m×n) قناة أو طريقاً يُمكن أن نستخدمها لنقل الوحدات من المصانع إلى مراكز الاستهلاك، هذا الشكل يُسمى الشبكة، والتي تتكون من نقاط ممثلة على شكل دوائر، وخطوط الاتصال بين هذه النقاط تُسمى المسارات (قنوات). كل منطقة عرض وطلب

(1) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 83.

ممثلة بنقطة وكل قناة يُمكن استخدامها ممثلة بمسار، السلع المشحونة من نقاط العرض إلى نقاط الطلب تُمثل التدفق في الشبكة، وإن اتجاه التدفق يشار ألية بسهم[1].



شكل (٣-١) يوضح الشكل العام لمشاكل النقل

حيث أن:

a_i : Name of source **i**. (i) أسم المصدر

b_j : Name of destination **j**. (j) أسم مركز التوزيع

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 194.

٣-٣ إيجاد الحل الأساسي الأولي المقبول لنموذج النقل

Obtaining an Initial Basic Feasible Solution for T.M.

بشكل عام نستطيع القول إن نماذج النقل تُمثل حالة خاصة للبرمجة الخطية وذلك من أجل إيجاد أقل الطرق تكلفة لإشباع الطلب المحدود في عدد من المواقع بما يتوافر من عرض محدود في عدد من المصانع، واستخدام البرمجة الخطية لحل نماذج النقل يحتاج إلى وقت وجهد كبيرين وخاصة إذا كانت متغيرات القرار كثيرة، ولهذا تم تطوير نموذج النقل الذي نستطيع من خلاله الوصول إلى الحل بجهد ووقت أقل.

عند حل أي نموذج نقل يجب الحصول أولاً على حل أساسي ابتدائي مقبول باستخدام عدد من الطرق الرياضية المستخدمة لحل مشاكل النقل ومنها:

١. طريقة الركن الشمالي الغربي.

٢. طريقة أقل الكلف.

٣. طريقة فوجل التقريبية.

من هنا نرى أن الخطوة الأولى لحل نماذج النقل هي إيجاد الحل الأولي المقبول والذي هو أي توزيع للكميات المعروضة والتي تحقق جميع الكميات المطلوبة.

٣-٤ طرق الحل الأولي[1] [2] Starting solution methods

مثال (٣-١): أحدى الشركات تمتلك ثلاث مصانع في مناطق مختلفة، المصنع الأول في المنطقة (A) طاقتهِ الإنتاجية = 25 وحدة، والمصنع الثاني في المنطقة (B) طاقتهِ الإنتاجية = 10 وحدة، والمصنع الثالث في المنطقة (C) طاقته الإنتاجية = 35 وحدة،

---

(1) Ruhul A. Sarker & Charles S. Newton, **Op. Cit.**, p. 85.

(٢) راهي، عبد الرحيم خلف، وابراهيم، سميرة خليل، **مصدر سبق ذكره**، ص ٧.

وتريد هذهِ الشركة مقابلة الطلب على منتجات هذهِ المصانع في أربع أسواق رئيسية موزعة في مناطق مختلفة، وقد تم تقدير كمية الطلب في السوق الأول (1) = 15 وحدة، والطلب في السوق الثاني (2) = 15 وحدة، والطلب في السوق الثالث (3) = 20 وحدة، والطلب في السوق الرابع (4) = 20 وحدة.

لاحظ أن هذهِ المشكلة هي مشكلة متوازنة، حيثُ أن العرض الكلي للمصانع الثلاثة يساوي الطلب الكلي للأسواق الأربعة وهو 70 وحدة، وقد تم تقدير التكاليف المصاحبة لنقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل سوق من الأسواق، والجدول التالي يلخص هذهِ التكاليف (محسوبة بالدولار):

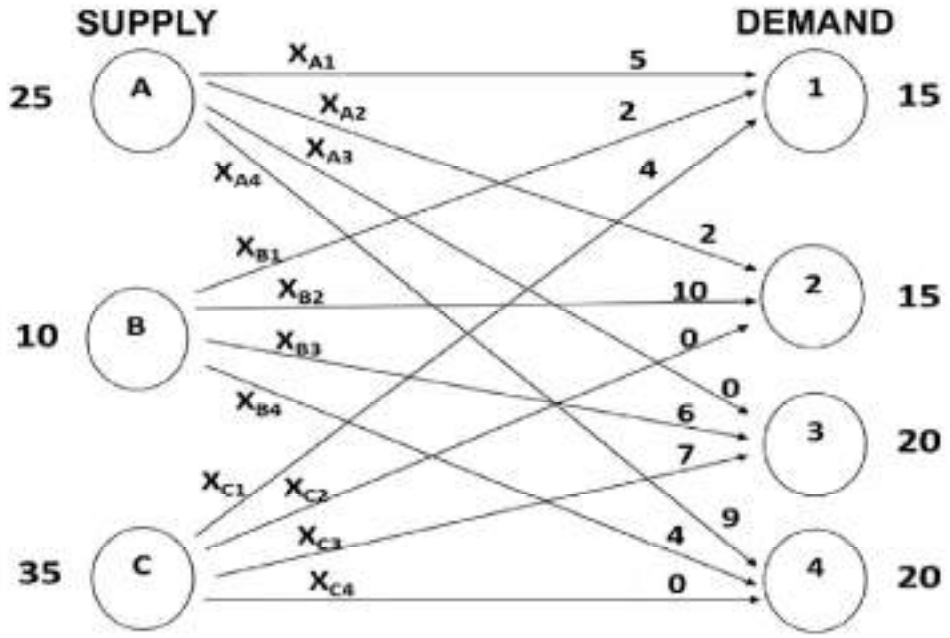
Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5	2	0	9	25
B	2	10	6	4	10
C	4	0	7	0	35
Demand	15	15	20	20	70 / 70

المطلوب: إيجاد الحل الأساسي الأولي المقبول لمشكلة النقل أعلاه مستخدماً جميع طرق الحل المتاحة لديك.

الحل:

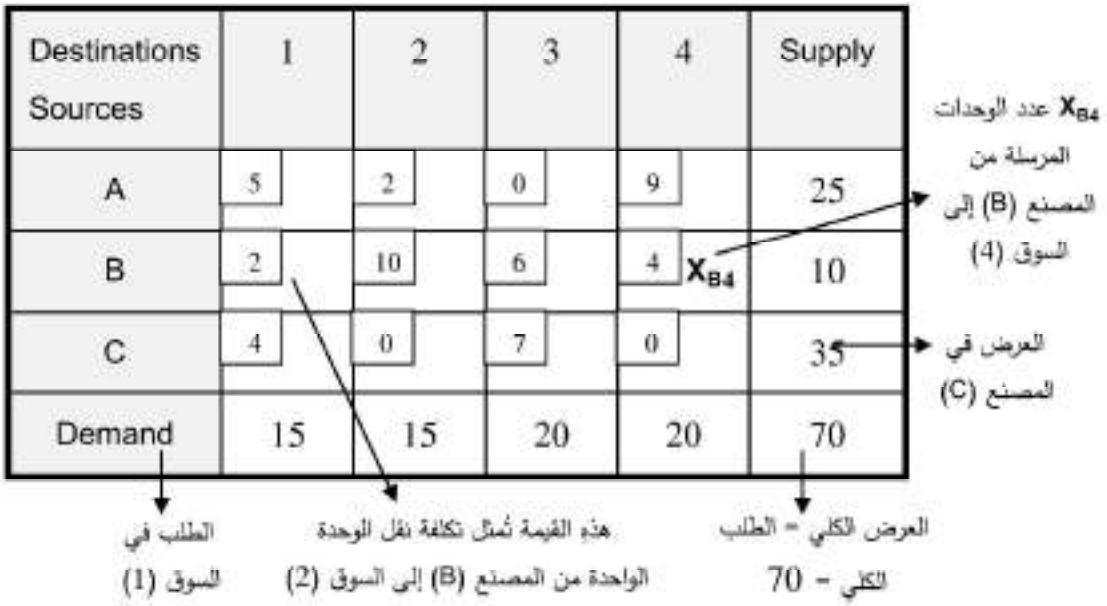
بالنسبة لمشكلة النقل لهذهِ الشركة، فإن الهدف هو تحديد الطرق أو القنوات (المسارات) لاستخدامها والكميات التي سيتم نقلها من خلال كل قناة أو طريق والتي ستزودنا بأقل

تكلفة نقل كلية مرتبطة بكمية الطلب في جميع الأسواق، والتكلفة لكل وحدة يتم نقلها من خلال كل قناة موضحة على كل مسار في الشكل الآتي:



الجدول التالي يوضح العرض المتوفر في كل مصنع وكذلك الطلب الموجود في كل سوق، ونُلاحظ أن العرض الكلي = الطلب الكلي، وكل خلية في هذا الجدول تُمثل طريقاً أو ممراً من المصنع إلى السوق، والرقم في الزاوية العليا للخلية يُمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر هذا الممر، على سبيل المثال فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع (B) إلى السوق (2) = 10$ وهكذا.

الصف الأخير في هذا الجدول يُمثل الطلب في كل سوق، أما العمود الأخير في الجدول فيُمثل الكمية المعروضة في كل مصنع من المصانع الثلاثة.



٣-٤-١ طريقة الركن الشمالي الغربي North-West Corner Method

تعتبر هذه الطريقة من أسهل الطرق لإيجاد الحل الأساسي الأولي حيث تكون عملية إيجاد الحل الأساسي من الركن (الزاوية) الشمالي الغربي وفق الخطوات الآتية:

١. إذا كان $D_1 < S_1$ أجعل $X_{11} = D_1$ ثم أنتقل إلى الخلية التالية (1,2).

٢. إذا كان $D_1 = S_1$ أجعل $X_{11} = D_1$ ثم أنتقل إلى الخلية التالية (2,2).

٣. إذا كان $D_1 > S_1$ أجعل $X_{11} = S_1$ ثم أنتقل إلى الخلية التالية (2,1).

٤. نستمر بهذا الأسلوب إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة ومقابلة كافة الطلبات.

٥. يتم حساب الكلفة الكلية $T.C. = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_{ij}$

من مزايا هذهِ الطريقة إنها تساعدنا في الوصول إلى الحل الأولي المقبول بسهولة وبسرعة وبأقل جهد، ولكن هذهِ الطريقة لا تزودنا بحل أولي جيد وذلك لأنها لا تأخذ التكلفة بعين الاعتبار.

نبدأ من الزاوية العليا في يسار الجدول خلية (A,1) ونقوم بإشباع الطلب أو العرض أيهما أقل، فإذا نفذت الكمية المطلوبة في السوق (1) وبقي شيء من الكمية المعروضة في المصنع (A)، فإننا ننتقل إلى الخلية التي تليها مباشرة في نفس الصف الخلية (A,2)، أما إذا نفذت الكمية المعروضة في المصنع (A) وبقي شيء من الكمية المطلوبة في السوق (A) غير مشبعة فإننا ننتقل إلى الخلية التي تقع تحتها مباشرة في الصف الثاني (B,1)، ونستمر بهذهِ العملية إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة ومقابلة كافة الطلبات.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5 **15**	2 **10**	0	9	~~25~~ ~~10~~ 0
B	2	10 **5**	6 **5**	4	~~10~~ ~~5~~ 0
C	4	0	7 **15**	0 **20**	~~35~~ ~~20~~ 0
Demand	~~15~~ 0	~~15~~ ~~5~~ 0	~~20~~ ~~15~~ 0	~~20~~ 0	70

نلاحظ أن $S_A=25 > D_1=15$ أي $X_{A1}=15$ وتم إشباع احتياج السوق (1) من الوحدات المطلوبة وتلغي جميع الخلايا المتبقية في عمود السوق (1) لعدم الحاجة

للأخذ من بقية المصانع (B & C) وبقي لدينا الكمية (10-15-25) وحدات في المصنع (A) لم يتم استخدامها.

ننتقل إلى الخلية التالية (A,2)، في هذه الخلية نُلاحظ أن $D_2=15 > S_A=10$ أي $X_{A2}=10$ وتم استخدام كل الكمية المتاحة عند المصنع (A) وتلغي جميع الخلايا المتبقية في صف المصنع (A) لعدم امتلاك هذا المصنع أي وحدات أخرى يستطيع إعطاءها للأسواق المتبقية، بقي لدينا (5-10-15) وحدات عند السوق (2) لم يتم تلبيتها.

ننتقل إلى الخلية التي تقع تحتها مباشرة وهي الخلية (B,2)، في هذه الخلية نُلاحظ أن $D_2=5 < S_B=10$ أي $X_{B2} = 5$ وتم إشباع احتياج السوق (2) من الوحدات المطلوبة، وتلغي جميع الخلايا المتبقية في عمود السوق (2) لعدم الحاجة للأخذ من المصنع المتبقي (C) وبقى لدينا الكمية (5-5-10) وحدات في المصنع (B) لم يتم استخدامها.

ننتقل إلى الخلية التالية (B,3)، في هذه الخلية نُلاحظ أن $D_3=20 > S_B=5$ أي $X_{B3}=5$ وتم استخدام كل الكمية المتاحة عند المصنع (B) وتلغي جميع الخلايا المتبقية في صف المصنع (B) لعدم امتلاك هذا المصنع أي وحدات أخرى يستطيع إعطاءها للأسواق المتبقية، بقي لدينا (15-5-20) وحدة عند السوق (3) لم يتم تلبيتها.

ننتقل إلى الخلية التي تقع تحتها مباشرة وهي الخلية (C,3)، في هذه الخلية نُلاحظ أن $D_3=15 < S_C=35$ أي $X_{C3} = 15$ وتم إشباع احتياج السوق (3) من الوحدات المطلوبة، وبقي لدينا الكمية (20-15-35) وحدة في المصنع (C) لم يتم استخدامها.

ننتقل إلى الخلية التالية (C,4)، في هذهِ الخلية نُلاحظ أن (S_C=20) = (D_4=20) أي X_{C4}=20 وتم استخدام كل الكمية المتاحة عند المصنع (C)، وتم إشباع احتياج السوق (4) من الوحدات المطلوبة، ونقوم هنا بإشباع الطلب والعرض ولا يبقى لدينا في هذهِ الحالة أي فائض في العرض أو الطلب، أي قمنا بتلبية جميع الطلبات في الأسواق الأربعة بالكميات المعروضة في المصانع الثلاثة، وهذا هو الحل الأولي المقبول.

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها 6 = 1–(4 + 3) = 1 –(M + N) وهي وفق القيم: X_{A1}=15, X_{A2}=10, X_{B2}=5, X_{B3}=5, X_{C3}=15, X_{C4}=20

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 5(15) + 2(10) + 10(5) + 6(5) + 7(15) + 0(20) = 280\$$$

٣–٤–٢ طريقة أقل الكلف Least Cost Method (LCM)

طريقة أخرى لإيجاد الحل الأولي المقبول بشكل أسرع وأقرب إلى الحل الأمثل، فهي تأخذ تكاليف نقل الوحدات بعين الاعتبار، وذلك بنقل أكبر كمية ممكنة من الوحدات إلى الخلية التي يصاحبها أقل تكلفة في جدول النقل، وإذا حدث أن كانت التكلفة الأقل مصاحبة لأكثر من خلية واحدة، فإننا نختار الخلية التي نستطيع أن ننقل إليها أكبر كمية ممكنة من الوحدات، وإذا تساوت هذهِ الكميات فإننا نختار خلية واحدة من بينها بشكل عشوائي.

نُعيد حل مثال (٣–١) بهذهِ الطريقة وكما موضح بالشكل الآتي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5
B	2	10	6 /	4	10
C	4	0	7 /	0	35
Demand	15	15	~~20~~ 0	20	70

نُلاحظ أن أقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي صفر، وهي موجودة في ثلاث خلايا (A,3) و (C,2) و (C,4)، وهنا فإننا نقوم بتحديد أكبر كمية من الوحدات يمكن نقلها إلى كل من هذهِ الخلايا الثلاث، ومن ثم نختار من بينها الخلية التي يُمكن أن ننقل إليها أكبر كمية ممكنة من الوحدات، حيثُ نختار الخلية (A,3) لأننا نستطيع أن ننقل إليها الكمية 20 وحدة بهذا يصبح X_{A3}=20 وتم إشباع احتياج السوق (3) من الوحدات المطلوبة، وتلغي جميع الخلايا المتبقية في عمود السوق (3) لعدم الحاجة للأخذ من المصانع المتبقية (B&C) ولذلك نقوم بتخفيض الكمية المعروضة في هذا السوق إلى الصفر ونستثني العمود (3) لهذا السوق من الحل في المرة المقبلة، وبقي لدينا الكمية (5-20-25) وحدة في المصنع (A) لم يتم استخدامها.

ملاحظة: يُمكن إجراء جميع الخطوات اللاحقة على نفس الجدول أعلاه، إلا إننا سوف نقوم بتوضيح كل خطوة بجدول مستقل من أجل توضيح هذهِ الطريقة.

بالنظر إلى الخلايا غير المظللة في الجدول أعلاه نجد أن الخلايا (C,2) و (C,4) لها أقل تكلفة، وبنفس الأسلوب السابق فإننا نختار الخلية (C,4) ونقوم بنقل 20 وحدة إليها، بهذا يصبح X_{C4}=20 وتم إشباع احتياج السوق (4) من الوحدات المطلوبة،

وتلغي جميع الخلايا المتبقية في عمود السوق (4) لعدم الحاجة للأخذ من المصانع المتبقية (A & B) ولذلك نقوم بتخفيض الكمية المطلوبة في هذا السوق إلى الصفر ونستثني العمود (4) لهذا السوق من الحل في المرة المقبلة، وبقي لدينا الكمية (35-20=15) وحدة في المصنع (C) لم يتم استخدامها، ونحصل على الجدول الآتي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5
B	2	10	6	4	10
C	4	0	7	0 **20**	~~35~~ 15
Demand	15	15	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70

ننظر الآن إلى الخلايا الأخرى غير المغطاة، ونجد أن الخلية (C,2) يصاحبها أقل تكلفة، وأكبر كمية يُمكن نقلها إلى هذهِ الخلية هي 15 وحدة، حيثُ يحتاج السوق (2) إلى 15 وحدة ولدينا 15 وحدة فقط متاحة في المصنع (C)، بهذا يصبح X_{C2}=15 وتم إشباع احتياج السوق (2) من الوحدات المطلوبة، وتلغي جميع الخلايا المتبقية في عمود السوق (2) لعدم الحاجة للأخذ من المصانع المتبقية (A & B) ولذلك نقوم بتخفيض الكمية المطلوبة في هذا السوق إلى الصفر ونستثني العمود (2) من الحل في المرة المقبلة، ونقوم بتخفيض الكمية المعروضة في المصنع (C) إلى الصفر ونستثني الخلايا غير المغطاة في الصف (C) من الحل في المرة المقبلة، ونحصل على الجدول الآتي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5	2 ~~/~~	0 **20**	9 ~~/~~	~~25~~ 5
B	2	10 ~~/~~	6 ~~/~~	4 ~~/~~	10
C	4	0 **15**	7 ~~/~~	0 **20**	~~35~~ ~~15~~ 0
Demand	15	~~15~~ 0	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70

ننظر الآن إلى الخلايا غير المظللة (المغطاة) ونجد أن الخلية (B,1) يصاحبها أقل تكلفة، وأكبر كمية يُمكن نقلها إلى هذهِ الخلية هي 10 وحدات، حيثُ يحتاج السوق (1) إلى 15 وحدة نستطيع تأمين 10 وحدات من المصنع (B) و5 وحدات من المصنع (A)، بهذا نكون قد استخدمنا جميع الكميات المعروضة وأشبعنا الطلب في الأسواق الأربعة بشكل كامل، وبالتالي فإن هذا الحل يُمثل حلاً أولياً ويكون جدول النقل الأولي لهذهِ الشركة على النحو الآتي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5 **5**	2 ~~/~~	0 **20**	9 ~~/~~	~~25~~ ~~5~~ 0
B	2 **10**	10 ~~/~~	6 ~~/~~	4 ~~/~~	~~10~~ 0
C	4 ~~/~~	0 **15**	7 ~~/~~	0 **20**	~~35~~ ~~15~~ 0
Demand	~~15~~ ~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها هي 5 حلول ولا تحقق القاعدة الآتية:

(عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) – 1)، حيثُ أن:

$$(M + N) - 1 = (3 + 4) - 1 = 6$$

أي أن الحل مفكك أو منحل (Degenerate Solution) ولكي يصبح الحل مقبولاً يجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وكأنها خلية عادية مملوءة وهنا الخلية (A,2)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

$$X_{A1} = 5,\ X_{A2} = \varepsilon,\ X_{A3} = 20,\ X_{B1} = 10,\ X_{C2} = 15,\ X_{C4} = 20.$$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 5(5) + 2(0) + 0(20) + 2(10) + 0(15) + 0(20) = 45\$$$

حيثُ سيتم مناقشة وإيضاح حالة الحل المفكك أو المنحل بشيء من التفصيل لاحقاً بإذن الله في موضوع الحالات الخاصة في مشاكل النقل.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5 **5**	2 ε	0 **20**	9	25
B	2 **10**	10	6	4	10
C	4	0 **15**	7	0 **20**	35
Demand	15	15	20	20	70

كما هو متوقع فإن هذا الحل أفضل من الحل الناتج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ذات التكلفة المساوية إلى 280$، بينما التكاليف المصاحبة للحل باستخدام طريقة أقل الكلف - 45$ أقل بكثير.

ملخص طريقة أقل الكلف:

١. ننقل أكبر كمية ممكنة من الوحدات إلى الخلية التي يصاحبها أقل تكلفة في جدول النقل، وإذا كانت التكلفة الأقل مصاحبة لأكثر من خلية واحدة في نفس الوقت، فإننا نختار من بينها الخلية التي نستطيع أن ننقل إليها أكبر كمية، وإذا أستمر التشابه في هذهِ الكميات أيضاً فإننا نختار الخلية الأقرب في الترتيب (إبتداءاً من الصف الأول ثم الثاني وهكذا...).

٢. تخفيض العرض في الصف والطلب في العمود بنفس مقدار كمية المواد التي تم نقلها إلى الخلية التي تم تحديدها في الخطوة السابقة.

٣. إذا تم استنفاذ جميع الكمية المعروضة في الصفوف والكميات المطلوبة في الأعمدة، فإننا نتوقف لأن ذلك يعطينا حلاً أولياً مقبولاً.

٤. إذا أصبحت الكمية المعروضة أو المطلوبة تساوي صفراً، فإننا نقوم باستثناء الصف أو العمود المقابل لهذهِ الكمية من الحل في المرة المقبلة، وذلك بتضليل هذا الصف أو العمود على التوالي.

٥. نستمر بالخطوات من ١ إلى ٢ لجميع الأعمدة والصفوف غير المغطاة.

٣-٤-٣ طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method (VAM)

تستخدم هذه الطريقة المعلومات المتعلقة بالتكلفة وذلك من خلال تطبيق مفهوم تكلفة الفرصة الضائعة (Penalty) (البديلة) لتحديد الحل الأساسي الأولي، وتعتبر أفضل من الطريقتين السابقتين لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل.

لإيجاد الحل الأساسي الأولي نتبع الخطوات الآتية[١] [٢]:

١. حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف أو عمود (تُمثل تكلفة الفرصة الضائعة لعدم استخدام أفضل ممر في ذلك الصف أو العمود).
٢. اختيار الفرق الأكبر من بين الصفوف أو الأعمدة.
٣. اختيار الخلية التي تتضمن أقل كلفة نقل في الصف أو العمود الذي يتم تحديده في الخطوة (٢).
٤. تخصيص أكبر كمية معروضة لتسديد طلب الموقع أو نفاذ الكمية المعروضة للمصدر.
٥. نقوم باستثناء الصف أو العمود من الحل في الدورة القادمة والذي تم استيعابه.
٦. حساب الكلفة الكلية $$T.C. = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_{ij}$$

بالرجوع إلى المثال (٣-١) فإن أفضل ممر لمصنع (A) والذي يحقق أقل تكلفة هو نقل الوحدات من هذا المصنع إلى السوق (3) حيثُ تكلفة نقل الوحدة إلى هذا السوق = 0 $، والممر الذي يليه من حيثُ انخفاض التكلفة هو الممر من المصنع (A)

---

(١) راهي، عبد الرحيم خلف، وابراهيم، سميرة خليل، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٥.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٥.

إلى السوق (2) بتكلفة = 2 $، وعليه فإن أي وحدة من المصنع (A) لا يتم نقلها إلى السوق (3) سوف تؤدي إلى تكاليف إضافية تساوي على الأقل $2 (وهي عبارة عن $2-0-2)، ولذلك فإن طريقة فوجل تعمل على تجنب أعلى تكلفة فرصة أو جزاء (أعلى ندم) وقيمتها للصف الأول = 2 والتي تعني عدم استخدام أفضل ممر في ذلك الصف.

نقوم بحساب تكلفة الفرصة أو الجزاء لكل صف ولكل عمود وذلك بأن نأخذ أقل تكلفة في كل صف وكل عمود ونطرحها من التكلفة التي تليها مباشرة من حيث القيمة في ذلك الصف أو العمود، ثم تحديد أعلى فرصة ضائعة (ندم) في كل من الصفوف والأعمدة، ومن ثم عمل التوزيع الذي يجتبنا هذا الندم، والجدول التالي يوضح تكلفة الفرصة والندم لكل صف وعمود:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply	كلف الجزاء
A	5	2	0	9	25	2
B	2	10	6	4	10	2
C	4	0	7	0	35	0
Demand	15	15	20	20	70	
كلف الجزاء	2	2	(6)	4		

في الجدول أعلاه نلاحظ أن أعلى كلفة جزاء ضائعة سواء للصفوف أو الأعمدة مصاحبة للسوق (3) = 6، ولتجنب هذه الفرصة الضائعة والندم فإننا يجب استخدام الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة نقل في ذلك العمود (سوق 3)، أي إيجاد

أفضل مصنع يجهز هذا السوق وهو مصنع (A) الذي يقابل أقل تكلفة = 0 في ذلك العمود، وننقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية (A,3).

بما أن الطلب في السوق (3) = 20 والعرض في المصنع (A) = 25، فإننا ننقل 20 وحدة إلى الخلية (A,3)، ونستثني العمود الثالث (السوق 3) من الحل في المرة المقبلة بسبب تجهيز هذا السوق بالكمية المطلوبة، ويبقى لدينا (5-20-25) وحدات لم تستغل عند المصنع (A).

نقوم بإعادة الخطوات السابقة من جديد أي احتساب تكلفة الفرصة الضائعة لكل صف وعمود آخذين بعين الاعتبار استثناء العمود الثالث من إجراءات الحل.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply	كلف الجزاء
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5	3
B	2	10	6	4	10	2
C	4	0	7	0	35	0
Demand	15	15	~~20~~ 0	20	70	
كلف الجزاء للأعمدة	2	2	---	(4)		

في الجدول أعلاه نلاحظ أن أعلى كلفة جزاء ضائعة للسوق (4) = 4، ولتجنب هذه الفرصة الضائعة نستخدم الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة نقل في ذلك العمود (سوق 4) = 0، وننقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية (C,4).

بما أن الطلب في السوق (4) = 20 والعرض في المصنع (C) = 35، فإننا ننقل 20 وحدة إلى الخلية (C,4)، ونستثني العمود الرابع (السوق 4) من الحل في المرة المقبلة بسبب تجهيز هذا السوق بالكمية المطلوبة، ويبقى لدينا (15-20-35) وحدات لم تستغل عند المصنع (C).

نقوم بإعادة الخطوات السابقة من جديد أي احتساب تكلفة الفرصة الضائعة لكل صف وعمود آخذين بعين الاعتبار استثناء العمود الرابع من إجراءات الحل.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply	كلف الجزاء
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5	3
B	2	10	6	4	10	(8)
C	4	0	7	0 **20**	~~35~~ 15	4
Demand	15	15	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70	
كلف الجزاء للأعمدة	---	2	2	---		

في الجدول أعلاه نلاحظ أن أعلى كلفة جزاء ضائعة مصاحبة للمصنع (B) = 8، ولتجنب هذه الفرصة الضائعة نستخدم الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة نقل في ذلك الصف (مصنع B) = 2، وننقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية (B,1).

بما أن الطلب في السوق (1) = 15 والعرض في المصنع (B) = 10، فإننا ننقل 10 وحدات إلى الخلية (B,1)، ونستثني الصف الثاني (المصنع B) من الحل في المرة المقبلة بسبب نفاذ الكمية المعروضة بالكامل ولا نستطيع أن نعطي للبقية، ويبقى (5=10-15) وحدات لم تلبى للسوق (1).

نقوم بإعادة الخطوات السابقة من جديد أي احتساب تكلفة الفرصة الضائعة لكل صف وعمود آخذين بعين الاعتبار استثناء الصف الثاني من إجراءات الحل.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply	كلف الجزاء
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5	3
B	2 **10**	10	6	4	~~10~~ 0	---
C	4	0	7	0 **20**	~~35~~ 15	(4)
Demand	~~15~~ 5	15	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70	
كلف الجزاء للأعمدة	1	2	---	---		

في الجدول أعلاه نُلاحظ أن أعلى كلفة جزاء ضائعة مصاحبة للمصنع (C) = 4، ولتجنب هذهِ الفرصة الضائعة نستخدم الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة نقل في ذلك الصف (مصنع C) = 0، وننقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية (C,2).

بما أن الطلب في السوق (2) = 15 والعرض في المصنع (C) = 15، فإننا ننقل 15 وحدة إلى الخلية (C,2)، ونستثني الصف الثالث (المصنع C) والعمود الثاني (سوق 2) من الحل في المرة المقبلة بسبب نفاذ الكمية المعروضة بالكامل وبسبب تجهيز هذا

السوق بالكمية المطلوبة، ويبقى لدينا صفر من الكمية المعروضة والمطلوبة عند المصنع (C) والسوق (2).

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5	2	0 **20**	9	~~25~~ 5
B	2 **10**	10	6	4	~~10~~ 0
C	4	0 **15**	7	0 **20**	~~35~~ ~~15~~ 0
Demand	~~15~~ 5	~~15~~ 0	~~20~~ 0	~~20~~ 0	70

نُلاحظ أنه لم يبقى لدينا إلا خلية واحدة (A،1) والتي تقابل العرض في المصنع (A)= 5 وحدات، والطلب في السوق (1)= 5 وحدات، بهذا نكون قد توصلنا إلى جدول الحل الأولي المقبول الآتي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	5 **5**	2 ε	0 **20**	9	25
B	2 **10**	10	6	4	10
C	4	0 **15**	7	0 **20**	35
Demand	15	15	20	20	70

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها هي 5 حلول ولا تحقق العلاقة الآتية:

$$(M + N) - 1 = (3 + 4) - 1 = 6$$

والحل مفكك أو منحل (Degenerate Solution) ولكي يصبح الحل مقبولاً يجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (A,2)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

$$X_{A1} = 5,\ X_{A2} = \varepsilon,\ X_{A3} = 20,\ X_{B1} = 10,\ X_{C2} = 15,\ X_{C4} = 20$$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 5(5) + 2(0) + 0(20) + 2(10) + 0(15) + 0(20) = 45\$$$

كما هو متوقع فإن هذا الحل أفضل من الحل الناتج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ذات التكلفة 280$، بينما التكاليف المصاحبة لطريقة فوجل = 45$ وهي مكافئة لطريقة أقل الكلف.

مثال (٣-٢): أحدى الشركة الصناعية تنتج نوع وحيد من المنتجات في مصانعها الثلاثة، الطاقة الإنتاجية للمصنع (3,2,1) هي (700,500,300) على الترتيب وتوزع منتجاتها على خمسة أسواق، الطاقة الاستيعابية (الطلب) للأسواق (5,4,3,2,1) هي (350,300,250,250,350) على الترتيب فإذا كانت المسافة بين المصانع والأسواق معطاة في الجدول الآتي:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5
1	40	60	80	100	50
2	180	70	90	120	40
3	30	80	60	50	20

علماً أن تكلفة نقل (الوحدة/كم) هي ($0.1) بالإضافة إلى تكلفة تحميل وتفريغ قدرها ($1) لكل وحدة منقولة.

المطلوب: صياغة نموذج نقل لهذه الشركة بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن، استخدم الطرق الثلاثة المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

الحل: بما أن تكلفة النقل للوحدة الواحدة = $0.1 / كم، وتكلفة التحميل والتفريغ = $1

فإن: تكلفة النقل = المسافة × تكلفة الكيلومتر + تكلفة التحميل والتفريغ

مثال ذلك تكلفة النقل من المصنع (1) إلى السوق (1) هي $5 = (1 + (0.1) × 40)، بهذا يُمكن إعادة صياغة جدول المسافات للمسألة أعلاه ليتكون لدينا جدول تكاليف النقل التالي مع إضافة كميات العرض والطلب له:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	العرض
1	5	7	9	11	6	300
2	19	8	10	13	5	500
3	4	9	7	6	3	700
الطلب	350	250	250	300	350	1500 / 1500

١) طريقة الركن الشمالي الغربي:

نبدأ من الزاوية العليا في يسار الجدول خلية (1,1) ونقوم بإشباع الطلب أو العرض أيهما أقل، فإذا نفذت الكمية المطلوبة في السوق (1) وبقي شيء من الكمية المعروضة في المصنع (1)، فإننا ننتقل إلى الخلية التي تليها مباشرة في نفس الصف الخلية (1,2)، أما إذا نفذت الكمية المعروضة في المصنع (1) وبقي شيء من الكمية المطلوبة في السوق (1) غير مشبعة فإننا ننتقل إلى الخلية التي تقع تحتها مباشرة في الصف الثاني (2,1)، ونستمر بهذه العملية إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة ومقابلة كافة الطلبات.

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	العرض
1	[5] 300	[7] /	[9] /	[11] /	[6] /	~~300~~ 0
2	[19] 50	[8] 250	[10] 200	[13] /	[5] /	~~500~~ ~~450~~ ~~200~~ 0
3	[4] /	[9] /	[7] 50	[6] 300	[3] 350	~~700~~ ~~650~~ ~~350~~ 0
الطلب	~~350~~ ~~50~~ 0	~~250~~ 0	~~250~~ ~~50~~ 0	~~300~~ 0	~~350~~ 0	1500 / 1500

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $7 = 1 - (5 + 3) = 1 - (M + N)$ وهي وفق القيم:

$X_{11}=300, X_{21}=50, X_{22}=250, X_{23}=200, X_{33}=50, X_{34}=300, X_{35}=350$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z=5(300)+ 19(50)+ 8(250)+ 10(200)+ 7(50)+ 6(300)+ 3(350)=9650$

٢) طريقة أقل الكلف:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	العرض
1	5 ε	7 250	9 50	11 /	6 /	300 50 0
2	19 /	8 /	10 200	13 300	5 /	500 300 0
3	4 350	9 /	7 /	6 /	3 350	700 350 0
الطلب	350 0	250 0	250 200 0	300 0	350 0	1500 / 1500

نلاحظ أن عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها هي 6 حلول ولا تحقق العلاقة الآتية: $(M + N) - 1 = (3 + 5) - 1 = 7$

والحل مفكك أو منحل ولكي يصبح الحل مقبولاً يجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (1.1)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم: $X_{11}=0,\ X_{12}=250,\ X_{13}=50,\ X_{23}=200,\ X_{24}=300,\ X_{31}=350,\ X_{35}=350$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z=5(0)+ 7(250)+ 9(50)+ 10(200)+ 13(300)+ 4(350)+ 3(350)=10550$

رغم أن طريقة أقل الكلف تعطينا نتائج أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي، إلا أنها في هذا المثال قد أعطت قيمة أكبر للكلفة الكلية مما عليه في طريقة الركن الشمالي الغربي.

٣) طريقة فوجل التقريبية (VAM):

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	العرض
1	5 /	7 250	9 50	11 /	6 /	300 50 0
2	19 /	8 /	10 150	13 /	5 350	500 150 0
3	4 350	9 /	7 50	6 300	3 /	700 400 50 0
الطلب	350 0	250 0	200 150 0	300 0	350 0	1500 / 1500

كلف الجزاء
1 1 2 (2)
3 (3) 2 2
1 1 (3) –

كلف الجزاء					
	1	1	2	(5)	2
	1	1	2	—	2
	1	1	2	—	—
	—	1	1	—	—

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $(M + N) - 1 = (3 + 5) - 1 = 7$

وهي وفق القيم:

$X_{12}=250, X_{13}=50, X_{23}=150, X_{25}=350, X_{31}=350, X_{33}=50, X_{34}=300$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z= 7(250)+ 9(50)+ 10(150)+ 5(350)+ 4(350)+ 7(50)+ 6(300)=9000$

كما هو متوقع فإن هذا الحل أفضل من الحل الناتج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ذات التكلفة المساوية إلى 9650$، كذلك أفضل من الحل باستخدام طريقة أقل الكلف ذات التكلفة المساوية إلى 10550$.

٣-٥ طرق الحل الأمثل لنموذج النقل

The optimal solution methods for T.M.

بشكل عام لا يُمكن ضمان الحصول على الحل الأمثل بشكل مباشر باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وأقل الكلف وطريقة فوجل التقريبية، فهذهِ الطرق تزودنا بالحل الأولي المقبول، وحتى لو أعطتنا هذهِ الطرق قيم جيده للحل فكيف نستطيع معرفة أن هذا الحل هو الحل الأمثل.

لذلك نحن بحاجة إلى استخدام طرق تمكننا من الانتقال من الحل الأولي المقبول إلى الحل الأمثل، وهذهِ الطرق هي طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المُعدل.

٣-٥-١ طريقة المسار المتعرج[١] [٢] [٣] Stepping-Stone Method

إن هذه الطريقة هي طريقة تسلسلية تتابعية وفق الخطوات الآتية:

١) إيجاد الحل الأولي الأساسي المقبول باستخدام أحدى الطرق الثلاثة:

- طريقة الركن الشمالي الغربي.
- طريقة أقل الكلف.
- طريقة فوجل التقريبية.

٢) التأكد من أن الحل الأولي المقبول الذي تم الحصول عليه من الطرق أعلاه تنطبق عليه القاعدة: (عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) – 1)، وفي كل خطوة فإن هذه الطريقة تحاول نقل الوحدات من خلال الممرات أو الخلايا غير المستخدمة في الحل الأولي المقبول، وعند الانتهاء من العمل على هذه الخلايا فإنها تصبح مستخدمة أو مشغولة، وهذا الإجراء يتم من أجل:

- تحقيق شروط الحل الأولي المقبول.
- تحسين قيمة دالة الهدف (تخفيضها في حالة التكاليف).

٣) تتوقف هذه الطريقة عندما لا يكون لتغيير الممرات أو الخلايا أي تأثير على تحسين قيمة دالة الهدف، عندها نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

---

(١) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣١٢.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢١.

(3) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 88.

مثـال (٣-٣): تنـتج أحدى شركات صـناعة الأسـمنت العراقيـة بفروعهـا (المصـانع) الواقعة في (بغداد، البصرة وسامراء) كميات محددة حسب الطلب الذي يأتي إليها من مراكز الاستهلاك (الأسواق) في (بابل، النجف والناصرية)، جدول النقل التالي يوضح كلف النقل (ألف دينار/1 طن) من الأسمنت من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك، كذلك كميات العرض والطلب عند كل مركز.

الأسواق / المصانع	بابل	النجف	الناصرية	العرض
بغداد	31	21	42	400
البصرة	20	21	30	1000
سامراء	23	20	15	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

المطلوب: إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة أقل الكلف وطريقة فوجل التقريبية، ثم إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

الحل: نستخدم طريقة أقل الكلف لإيجاد الحل الأولي المقبول بالشكل الآتي:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 200	42 200	~~400~~ ~~200~~ 0
البصرة B	20 300	21 700	30	~~1000~~ ~~700~~ 0
سامراء C	23	20	15 600	~~600~~ 0
الطلب	~~300~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~800~~ ~~200~~ 0	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 – 1 = M + N – 1 – 3 + 3 – 1 وهي وفق القيم:

$X_{12} = 200,\ X_{13} = 200,\ X_{21} = 300,\ X_{22} = 700,\ X_{33} = 600$

ألف دينار 42300=(600)15 +(700)21 +(300)20 +(200)42 +(200)21= Min. Z

أما لإيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة فوجل التقريبية فبالشكل الآتي:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 400	42	~~400~~ 0
البصرة B	20 300	21 500	30 200	~~1000~~ ~~800~~ ~~500~~ 0
سامراء C	23	20	15 600	~~600~~ 0
الطلب	~~300~~ 0	~~900~~ ~~500~~ 0	~~800~~ ~~200~~ 0	2000 / 2000

كلف الجزاء		
10	10	10
1	1	1
5	---	---

كلف الجزاء			
	3	1	(15)
	11	0	(12)
	(11)	0	---

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{A2} = 400, X_{B1} = 300, X_{B2} = 500, X_{B3} = 200, X_{C3} = 600$

Min. Z= 21(400)+ 20(300)+ 21(500)+ 30(200)+ 15(600) =39900 ألف دينار

الخطوة الأولى: إيجاد التكاليف الحدية

نستخدم الحل الأولي المقبول لطريقة أقل الكلف السابقة لتقييم التكاليف الحديه لإرسال أو نقل الوحدات من خلال كل الممرات أو الخلايا غير المستخدمة، فمثلاً نرغب بتحديد التكلفة الحدية لاستخدام الخلية (A.1) أي تحديد تكلفة إرسال وحدة واحدة من خلال هذهِ

الخلية، والقيام بتعديل فقط الخلايا المستخدمة الأخرى بطريقة تحافظ على الحل المقبول، وتكون عملية التعديل على النحو الآتي:

أ) زيادة عدد الوحدات في الخلية (A,1) بمقدار وحدة واحدة، ونضع الإشارة (+) في هذه الخلية.

ب) إن الزيادة في الخلية (A,1) يتطلب بالضرورة إنقاص خلية مستخدمة في نفس الصف بمقدار وحدة واحدة، إما الخلية (A,2) أو (A,3)، وغير ذلك سيؤدي إلى تجاوز الكمية المعروضة في مصنع بغداد (A) وهي 400 وحدة، أفترض أننا اخترنا الخلية (A,2) لإنقاصها بوحدة واحدة، ونضع الإشارة (−) في هذه الخلية.

ت) إنقاص وحدة واحدة من الخلية (A,2) يتطلب بالضرورة زيادة بمقدار وحدة واحدة في خلية مستخدمة في العمود الثاني (سوق النجف) وهي الخلية (B,2)، وغير ذلك سوف لن يتم اشباع الطلب في هذا السوق وهو 900 وحدة، ونضع الإشارة (+) في هذه الخلية.

ث) الزيادة في الخلية (B,2) يتطلب بالضرورة إنقاص وحدة واحدة من خلية مستخدمة في نفس الصف وهي الخلية (B,1)، وغير ذلك سيؤدي إلى تجاوز الكمية المعروضة في مصنع سامراء (C) وهي 600 وحدة، ونضع الإشارة (−) في هذه الخلية.

ج) إنقاص وحدة واحدة من الخلية (B,1) متوازن مع الزيادة في الخلية (A,1) التي قمنا بها في الخطوة (أ)، ولذلك ليس هناك حاجة للمزيد من التغييرات.

الخطوات من (أ) إلى (ج) أعطتنا القدرة لزيادة الخلية (A,1) بمقدار وحدة واحدة وتعديل الخلايا الأخرى المستخدمة حالياً للمحافظة على الحل المقبول، ويُمكن إجراء

نفس الأمر في حالة نقل مقدار معين من الوحدات من خلية إلى أخرى، ونستمر من خلال وضع أشارة (+) وإشارة (−) بالنسبة للصفوف والأعمدة حتى يؤدي تتابع أو تسلسل الخلايا التي تم تأسيسها إلى تحقيق هدفين هما:

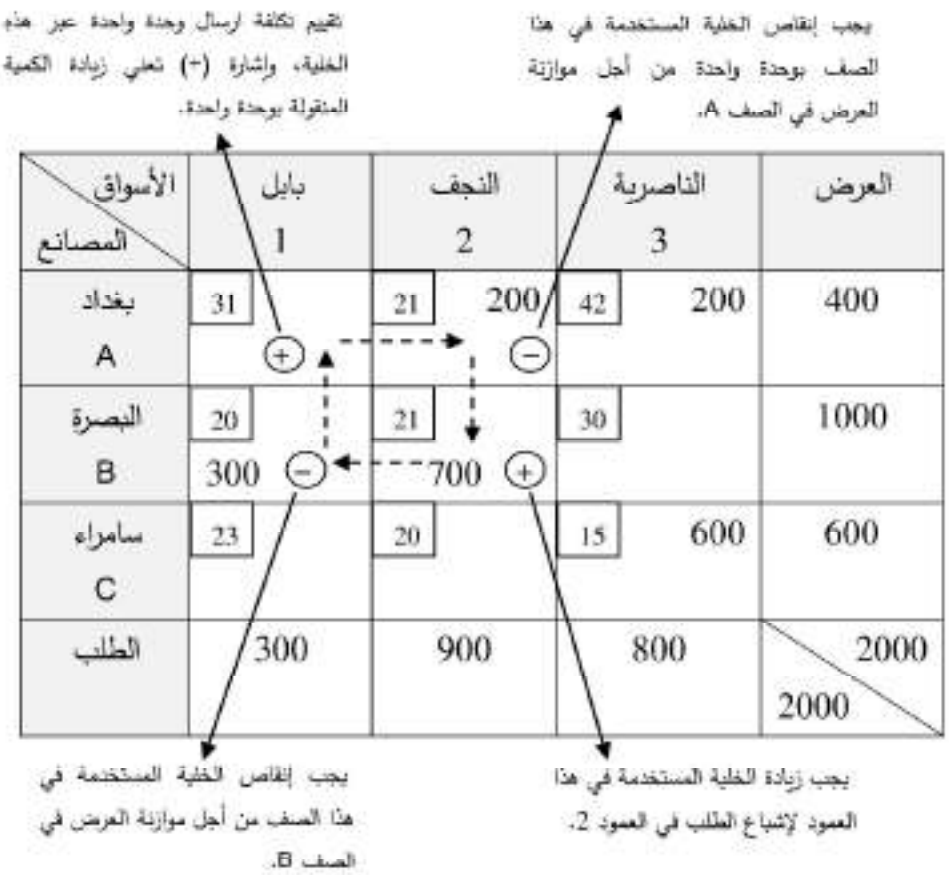
١. احتواء الخلايا غير المستخدمة موضوع الاهتمام على أشارة (+).
٢. أي صف (أو عمود) يحتوي على أشارة (+) يجب أن يحتوي على أشارة (−) والعكس صحيح.

تسلسل الخطوات هذا يسمى المسار المتعرج، هذا المسار يجب أن يكون مساراً مغلقاً يبدأ من الخلية غير المستخدمة موضوع الاهتمام وينتهي بها، والزوايا الثلاث الأخرى في هذا المسار المغلق يجب أن تكون مستخدمة، على أن يتم اختيار الخلايا المستخدمة بطريقة تسمح لتشكيل المسار المغلق، وقد نحتاج لأكثر من ثلاث خلايا مستخدمة لتشكيل هذا المسار كما سيتم ملاحظة ذلك في مثالنا هذا.

من جدول الحل الأساسي المقبول بطريقة أقل الكلف نجد أن لدينا أربع خلايا غير مستخدمة وهي X_{A1} ، X_{B3}، X_{C1} و X_{C2}.

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31 X_{A1}	21 200	42 200	400
البصرة B	20 300	21 700	30 X_{B3}	1000
سامراء C	23 X_{C1}	20 X_{C2}	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

جدول النقل التالي يوضح مثال للمسار المغلق للخلية غير المستخدمة X_{A1} وكيفية إجراء الإضافة والطرح:



الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31 ⊕	21 200 ⊖	42 200	400
البصرة B	20 300 ⊖	21 700 ⊕	30	1000
سامراء C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

أما جدول النقل التالي فيوضح مثال للمسار المغلق للخلية غير المستخدمة X_{C1}:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 200 ⊖	42 200 ⊕	400
البصرة B	20 ⊖ 300	21 ⊕ 700	30	1000
سامراء C	23 ⊕	20	15 600 ⊖	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

نحسب الكلف الحدية لجميع الخلايا غير المستخدمة لمثالنا أعلاه بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{A1}	$+C_{A1} - C_{A2} + C_{B2} - C_{B1}$	+31 −21 +21 −20 = +11
X_{B3}	$+C_{B3} - C_{A3} + C_{A2} - C_{B2}$	+30 −42 +21 −21 = (−12)
X_{C1}	$+C_{C1} - C_{B1} + C_{B2} - C_{A2} + C_{A3} - C_{C1}$	+23 −20 +21 −21 +42 −15 = +30
X_{C2}	$+C_{C2} - C_{A2} + C_{A3} - C_{C3}$	+20 − 21 +42 −15 = +26

من هنا نرى أن الحل الأولي المقبول ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمة سالبة لأحدى الكلف الحدية وهي (12−)، وأن أي وحدة يتم نقلها من المصنع (B) إلى السوق (3)

سوف تؤدي إلى إنقاص قيمة دالة الهدف بمقدار 12 ألف دينار/ طن، وعلينا إيجاد حلاً جديداً.

الخطوة الثانية: اختيار الخانة غير المستخدمة

إذا كانت جميع التكاليف الحدية أكبر من أو تساوي صفراً، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل، بخلافة فإننا نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب، وفي مثالنا نختار الخلية (B,3) والتي يصاحبها أكبر رقم سالب وهو (12-).

الخطوة الثالثة: إيجاد الجدول الجديد

نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات والتي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها في الخطوة الثانية وهي الخلية (B,3) ومن ثم نقوم بتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، وبصورة أخرى فإن تحديد الكمية الواجب نقلها تكون باختيار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{B3} وهي 200 وحدة الواقعة في الخلية (A,2).

بهذا نقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (A,2) و (B,3) بمقدار 200 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (-) وهي الخلية (A,3) و (B,2) بمقدار 200 وحدة أيضاً، وينتج عن هذه العملية الجدول الآتي:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 400	42	400
البصرة B	20 300	21 500	30 200	1000
سامراء C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ وهي وفق القيم:

$X_{12} = 400, X_{21} = 300, X_{22} = 500, X_{23} = 200, X_{33} = 600$

Min. Z= 21(400)+ 20(300)+ 21(500)+ 30(200)+ 15(600)=39900 ألف دينار

يُمكن مُلاحظة التحسن الذي طرأ على قيمة دالة الهدف بعد استخدام طريقة المسار المتعرج.

الخطوة الرابعة: إعادة الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل

نعود للخطوة الأولى ونقوم بإعادة تقييم التكاليف الحدية للخلايا غير المستخدمة حالياً، والأرقام المحاطة بدوائر في جدول النقل التالي توضح هذه التكاليف:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31 (+11)	21 400	42 (+12)	400
البصرة B	20 300	21 500	30 200	1000
سامراء C	23 (+18)	20 (+14)	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

حيثُ تم حساب التكاليف الحدية أعلاه بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{A1}	$+ C_{A1} - C_{A2} + C_{B2} - C_{B1}$	+31 −21 +21 −20 = +11
X_{A3}	$+ C_{A3} - C_{B3} + C_{B2} - C_{A2}$	+42 −30 +21 −21 = +12
X_{C1}	$+ C_{C1} - C_{B1} + C_{B3} - C_{C3}$	+23 −20 +30 −15 = +18
X_{C2}	$+ C_{C2} - C_{B2} + C_{B3} - C_{C3}$	+20 − 21 +30 −15 = +14

وحيثُ أن جميع التكاليف الحدية أكبر من أو تساوي صفراً، فإننا نقول بأننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف الأخيرة (39900) ألف دينار/ طن هي القيمة المثلى للشركة.

ملاحظات عامة:

١) نُلاحظ أن الحل الأولي المقبول لطريقة فوجل هو حل أمثل وذلك لأن التكلفة الكلية = 39900، وهي مساوية لقيمة دالة الهدف باستخدام طريقة المسار المتعرج، وأن الخلايا المستخدمة متشابهة أيضاً وهذا يعني أن طريقة فوجل زودتنا بحل أمثل مباشرة وهذا لا يحدث دائماً، وبالتالي فإن طريقة فوجل تعطي حلاً أولياً مقبولاً أفضل من طريقة أقل الكلف (المساوية إلى 42300) وطريقة الركن الشمالي الغربي (التكلفة الكلية عند حلها مساوية إلى 43200)، وأحياناً يكون هذا الحل حلاً أمثلاً.

٢) في حالة استخدام الحل الأولي المقبول الناتج من طريقة فوجل وطبقنا عليه طريقة المسار المتعرج للوصول إلى الحل الأمثل فإن عملية تقييم الخلايا غير المستخدمة في الجدول الأولي ستعطي قيماً جميعها أكبر من أو تساوي صفراً، وهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل مباشرة من خلال طريقة فوجل، وهذا لا يحدث دائماً.

٣) يُمكن التعرف على وجود حل أمثل بديل بعد استخدام طريقة المسار المتعرج من خلال ظهور قيمة صفر لواحدة أو أكثر من التكاليف الحدية للخلايا غير المستخدمة التي نقوم بتقييمها في جدول الحل الأمثل، وهذا يعني أن هذهِ الخلية يُمكن أن تستخدم دون أن يؤثر ذلك على قيمة دالة الهدف.

٤) إن تحديد المسار المناسب عند حساب التكلفة الحدية للخلية غير المستخدمة (في الخطوة الأولى) يكون أكثر تعقيداً من القفز فقط من الخلية ذات الاهتمام لأي خلية مستخدمة في نفس الصف أو العمود، فالنهايات الميتة قد لا تكون بالحسبان، والتي عندها يجب أن نقوم بمحاولة أخرى، على سبيل المثال عند استخراج مسار للخلية غير المستخدمة X_{A1} (في الخطوة الأولى للمثال السابق) وكان المسار

بالشكل : $+ C_{A1} - C_{A3} + C_{C3} - (\ ?\ )$ ، فليس لدينا خلية مستخدمة يُمكن القفز أليها ووضعها محل علامة (?)، هذا يعني أن لدينا مسار ذو نهاية ميتة ولا يُمكن الاستمرار بـه ألا بتغيير ذلك المسار والقيام بمحاولة أخرى للقفز إلى خلايا مستخدمة في مواقع مغايرة.

مثال (٣-٤): تملك وزارة التجارة العراقية ثلاث مخازن كبيرة هي (A، B، C) لتخزين منتج القمح، وترغب بنقل هذا المنتج إلى ثلاث مراكز بيع بالجملة هي (D، E، F)، حصلت الوزارة من أحدى شركات النقل العراقية العملاقة على عرض مغري لتكاليف النقل النهائية لهذا المنتج من مخازن الوزارة إلى مراكز البيع مقدرة (بالدولار / طن)، جدول النقل التالي يبين هذه التكاليف إضافة إلى سعة كل مخزن والكميات التي تطلبها مراكز البيع مقدرة بالطن:

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6	9	16	200
B	11	10	7	200
C	16	12	10	200
الطلب	150	200	250	600 / 600

المطلوب إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي وأقل الكلف وفوجل التقريبية، ثم إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

الحل: نستخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي المقبول بالشكل الآتي:

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6 150	9 50	16 /	200 /50 0
B	11 /	10 150	7 50	200 /50 0
C	16 /	12 /	10 200	200 0
الطلب	150 0	200 150 0	250 200 0	600 / 600

عدد الحلول المقبولة M + N – 1 = 3 + 3 – 1 = 5 وهي وفق القيم:

X_{11} = 150, X_{12} = 50, X_{22} = 150, X_{23} = 50, X_{33} = 200

Min. Z= 6(150) + 9(50) + 10(150) + 7(50) + 10(200) = 5200 $

نستخدم طريقة أقل الكلف لإيجاد الحل الأولي المقبول بالشكل الآتي:

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6 150	9 50	16 /	200 /50 0
B	11 /	10 /	7 200	200 0
C	16 /	12 150	10 50	200 150 0
الطلب	150 0	200 150 0	250 50 0	600 / 600

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 150, X_{12} = 50, X_{23} = 200, X_{32} = 150, X_{33} = 50$

Min. Z= 6(150) + 9(50) + 7(200) + 12(150) + 10(50) = 5050 $

وعندما نستخدم طريقة فوجل التقريبية فإن الحل الأولي المقبول يكون بالشكل الآتي:

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6 150	9 50	16 /	200 50 0
B	11 /	10 /	7 200	200 0
C	16 /	12 150	10 50	200 150 0
الطلب	150 0	200 150 0	250 50 0	600 600

كلف الجزاء		
3	(7)	---
3	3	(3)
2	2	2

كلف الجزاء			
	(5)	1	3
	---	1	3
	---	2	3

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 150, X_{12} = 50, X_{23} = 200, X_{32} = 150, X_{33} = 50$

Min. Z= 6(150) + 9(50) + 7(200) + 12(150) + 10(50) = 5050 $

الخطوة الأولى: إيجاد التكاليف الحدية

من جدول الحل الأساسي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي نجد أن لدينا أربع خلايا غير مستخدمة وهي X_{13} ، X_{21}، X_{31} و X_{32}.

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6 — 150	9 — 50	16	200
B	11	10 — 150 (−)	7 — 50 (+)	200
C	16	12 — X_{32} (+)	10 — 200 (−)	200
الطلب	150	200	250	600 / 600

نحسب الكلف الحدية لجميع الخلايا غير المستخدمة بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{13}	$+C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12}$	$+16 -7 +10 -9 = +9$
X_{21}	$+C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22}$	$+11 -6 +9 -10 = +4$
X_{31}	$+C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{22} + C_{23} - C_{33}$	$+16 -6 +9 -10 +7 -10 = +6$
X_{32}	$+C_{32} - C_{22} + C_{23} - C_{33}$	$+12 -10 +7 -10 = (-1)$

من هنا نرى أن الحل الأولي المقبول ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمة سالبة لأحدى الكلف الحدية وهي (1-)، وأن أي وحدة يتم نقلها من المخزن (C) إلى مركز البيع (E) سوف تؤدي إلى إنقاص قيمة دالة الهدف بمقدار 1$/ طن، وعلينا إيجاد حلاً جديداً.

الخطوة الثانية: اختيار الخانة غير المستخدمة

نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب، وهي الخلية X_{32} عند الموقع (C , E) ومقدارها (1-).

الخطوة الثالثة: إيجاد الجدول الجديد

نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{32} وهي 150 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (C,E) و (B,F) بمقدار 150 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (-) وهي الخلية (B,E) و (C,F) بمقدار 150 وحدة أيضاً، وينتج عن هذهِ العملية الجدول الآتي:

مراكز التوزيع / المخازن	D	E	F	العرض
A	6 150	9 50	16	200
B	11	10	7 200	200
C	16	12 150	10 50	200
الطلب	150	200	250	600 / 600

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ وهي وفق القيم:

$X_{11} = 150,\ X_{12} = 50,\ X_{23} = 200,\ X_{32} = 150,\ X_{33} = 50$

Min. Z= 6(150) + 9(50) + 7(200) + 12(150) + 10(50) = 5050 $

نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت وأصبحت أقل وتساوي (5050$) مقارنة بالقيمة السابقة التي هي (5200$)، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نُعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{13}	$+ C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12}$	+16 −10 +12 −9 = +9
X_{21}	$+ C_{21} - C_{23} + C_{33} - C_{32} + C_{12} - C_{11}$	+11 −7 +10 −12 +9 −6 = +5
X_{22}	$+ C_{22} - C_{23} + C_{33} - C_{32}$	+10 −7 +10 −12 = +1
X_{31}	$+ C_{31} - C_{32} + C_{12} - C_{11}$	+16 −12 +9 −6 = +7

بما أن جميع قيم الكلف الحدية أعلاه أكبر من أو تساوي صفراً، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف الأخيرة ($ 5050) هي القيمة المثلى، والتي هي مساوية لما حصلنا عليه من طريقتي أقل الكلف وطريقة فوجل التقريبية من حيث قيمة دالة الهدف ومن حيث توزيع الخلايا المستخدمة، وهذا يدل على كفاءة هاتين الطريقتين وإعطاءهما قيم مساوية للحل الأمثل، وهذا لا يحدث دائماً.

٣-٥-٢ طريقة التوزيع المُعدل[١] Modified Distribution Method (MODI)

وهي طريقة مطورة لطريقة المسار المتعرج، وتدعى أيضاً الطريقة المبسطة (العامة) للنقل[٢] (Transportation Simplex Method)، وقبل البدء بهذهِ الطريقة يجب التأكد من تحقق القاعدة:

عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) – 1

وتتكون هذهِ الطريقة من خطوتين لإيجاد التكاليف الحدية وهما:

الخطوة الأولى: تحديد مؤشر لكل صف (U_i) مثلاً ($U_1, U_2, U_3,...$) وتحديد مؤشر لكل عمود (V_j) مثلاً ($V_1, V_2, V_3,...$)، وبالتالي تطبيق القاعدة ($C_{ij} = U_i + V_j$) مع الخلايا المستخدمة في جدول الحل الأولي المقبول وذلك لتقدير قيم المؤشرات (U_i) و (V_j)، حيثُ C_{ij} تُمثل تكلفة إرسال وحدة واحدة من المصنع (i) إلى السوق (j).

بالرجوع إلى جدول الحل الأولي المقبول لطريقة أقل الكلف لمثال (٣-٣) الآتي:

---

(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٢.

(2) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 379.

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 200	42 200	400
البصرة B	20 300	21 700	30	1000
سامراء C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

نتحقق من أن عدد الحلول المقبولة (الخلايا المستخدمة) 5 =1 – 3 + 3 =1 – M + N، ونكون معادلات لحساب الكلف الحدية للخلايا المستخدمة في جدول الحل الأولي المقبول أعلاه، ولو تم افتراض أن قيمة المؤشر (U_1=0) فإننا نستطيع تعويض هذه القيمة في المعادلة الأولى أدناه، ومن ثم إيجاد قيمة المؤشر الآخر في المعادلة، ونستخدم القيمة التي حصلنا عليها وتعويضها في معادلة أخرى للحصول على قيمة متغير آخر، وهكذا حتى نحصل على قيم جميع المؤشرات الأخرى كما في الجدول الآتي:

Occupied Cell الخلايا المستخدمة	Unit's Cost تكلفة الوحدة	The equation المعادلة
X_{12}	21	$C_{12} = U_1 + V_2 \rightarrow 21 = 0 + V_2 \rightarrow V_2 = 21$
X_{13}	42	$C_{13} = U_1 + V_3 \rightarrow 42 = 0 + V_3 \rightarrow V_3 = 42$
X_{21}	20	$C_{21} = U_2 + V_1 \rightarrow 20 = ? + ? \rightarrow 20 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 20$
X_{22}	21	$C_{22} = U_2 + V_2 \rightarrow 21 = U_2 + 21 \rightarrow U_2 = 0$
X_{33}	15	$C_{33} = U_3 + V_3 \rightarrow 15 = U_3 + 42 \rightarrow U_3 = -27$

يتم وضع هذهِ القيم على جدول النقل كما يلي:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض	U_i
بغداد A	31	21 200 (+)	42 200 (−)	400	$U_1 = 0$
البصرة B	20 300	21 700 (−)	30 (+)	1000	$U_2 = 0$
سامراء C	23	20	15 600	600	$U_3 = -27$
الطلب	300	900	800	2000 / 2000	
V_j	$V_1 = 20$	$V_2 = 21$	$V_3 = 42$		

الخطوة الثانية: حساب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة وفق المعادلة الآتية:

$$\left(\text{التكلفة الحدية}\right) = \left(\text{التكلفة}\right) - \left(\text{مجموع مؤشرات الصف}\right)$$

$$\rightarrow \Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\Delta_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 31 - 0 - 20 = +11$$

$$\Delta_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 30 - 0 - 42 = -12$$

$$\Delta_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 23 - (-27) - 20 = +30$$
$$\Delta_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 20 - (-27) - 21 = +26$$

والآن نقوم باختيار أقل تكلفة حدية وهي ($\Delta_{23} = -12$) ، ثم نقوم بتحديد أكبر كمية يُمكن نقلها إلى هذهِ الخلية وهي (200) وحدة (وهي الكمية التي نستطيع نقلها دون أن تؤثر على التوازن بين الكميات المعروضة والمطلوبة)، وذلك بتشكيل المسار المتعرج مبتدئين بالخلية X_{23} ونضع فيها أشارة (+)، ثم نختار خلية مستخدمة في نفس الصف وهي X_{22} ونضع فيها أشارة (−) ونطرح منها (200)، ثم نختار خلية مستخدمة في نفس العمود وهي X_{12} ونضع فيها أشارة (+) وننقل إليها الكمية (200)، ثم نختار خلية مستخدمة أخرى في نفس الصف وهي X_{13} ونضع فيها أشارة (−) ونطرح منها (200)، بهذا تم تشكيل مسار متعرج مغلق كما في جدول النقل السابق، وبعد نقل هذهِ الكمية فإننا نحصل على الجدول الآتي:

الأسواق / المصانع	بابل 1	النجف 2	الناصرية 3	العرض
بغداد A	31	21 400	42 200	400
البصرة B	20 300	21 500	30 200	1000
سامراء C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة M + N – 1 = 3 + 3 – 1 = 5 وهي وفق القيم:

$X_{A2} = 400, X_{B1} = 300, X_{B2} = 500, X_{B3} = 200, X_{C3} = 600$

Min. Z= 21(400)+ 20(300)+ 21(500)+ 30(200)+ 15(600)=39900 ألف دينار

نُلاحظ أن الكلفة الكلية أعلاه مساوية لقيمة الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه من طريقة المسار المتعرج، وللتأكد من أن الجدول أعلاه هو جدول الحل الأمثل فإن علينا أعادة حساب الكلف الحدية من جديد للتأكد من أن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفراً.

أولاً: نكون معادلات لحساب الكلف الحدية للخلايا المستخدمة في جدول الحل الأولي المقبول أعلاه، ونفترض أن قيمة المؤشر (U_1=0) كما في الجدول الآتي:

Occupied Cell الخلايا المستخدمة	Unit's Cost تكلفة الوحدة	The equation المعادلة
X_{12}	21	$C_{12} - U_1 + V_2 \rightarrow 21 - 0 + V_2 \rightarrow V_2 - 21$
X_{21}	20	$C_{21} = U_2 + V_1 \rightarrow 20 = ? + ? \rightarrow 20 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 20$
X_{22}	21	$C_{22} - U_2 + V_2 \rightarrow 21 - U_2 + 21 \rightarrow U_2 - 0$
X_{23}	30	$C_{23} - U_2 + V_3 \rightarrow 30 - 0 + V_3 \rightarrow V_3 - +30$
X_{33}	15	$C_{33} - U_3 + V_3 \rightarrow 15 - U_3 + 30 \rightarrow U_3 - -15$

ثانياً: نحسب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة:

$\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\Delta_{11} - C_{11} - U_1 - V_1 - 31 - 0 - 20 - +11$

$\Delta_{13} - C_{13} - U_1 - V_3 - 42 - 0 - 30 - +12$

$\Delta_{31} - C_{31} - U_3 - V_1 - 23 - (-15) - 20 - +18$

$$\Delta_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 20 - (-15) - 21 = +14$$

طالما أن جميع التكاليف الحدية موجبة، هذا يعني أن جدول الحل الأخير هو جدول الحل الأمثل.

ملخص لطريقتي المسار المتعرج والتوزيع المعدل[1]:

تبدأ الطريقتين بعد الحصول على الحل الأولي المقبول والذي يحقق القاعدة المتعلقة بعدد الخلايا المستخدمة:

عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) − 1

أ) طريقة المسار المتعرج:

١) استخدام الحل الحالي لإيجاد مساراً متعرجاً لكل خلية غير مستخدمة، مع حساب التكلفة الحدية لهذهِ الخلايا لتحديد أي خلية منها سيتم إدخالها للحل.

٢) إذا كانت جميع التكاليف الحدية أكبر من أو تساوي صفراً، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل ونتوقف، أما إذا كانت هنالك قيم أقل من الصفر، فإننا نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب (أقل قيمة)، وإذا كان هنالك قيمتان متساويتان فإننا نختار أحداهما بشكل عشوائي.

٣) استخدام المسار المتعرج الخاص بالخلية التي تم اختيارها في خطوة (٢)، وتحديد أكبر عدد من الوحدات يُمكن إرسالها عبر هذا المسار لهذهِ الخلية، ومن ثم تعديل التوزيع بما يتناسب مع الوضع الجديد.

٤) العودة إلى الخطوة الأولى حتى يتم الحصول على الحل الأمثل.

---

(١) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص٣٣٠.

ب) طريقة التوزيع المُعدل:

١. استخدام الحل الحالي والعمليات (أ) و (ب) التالية لتقييم التكلفة الحدية لإرسال الوحدات لكل خلية غير مستخدمة:

أ. أفترض أن $U_1=0$، ثم أوجد بقية المؤشرات الخاصة بالصفوف والأعمدة وهي ($U_2, U_3, \dots$) كذلك ($V_1, V_2, V_3, \dots$)، وذلك من أجل تشكيل المعادلات الآتية:

$$\begin{pmatrix}\text{التكلفة الأصلية في}\\ \text{الخلية المستخدمة}\\ (C_{ij})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{المؤشر للصف}\\ \text{المرتبط بتلك الخلية}\\ (U_i)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{المؤشرللعمود المرتبط}\\ \text{بتلك الخلية}\\ (V_j)\end{pmatrix}$$

ب. بعد إيجاد مؤشرات الصفوف والأعمدة، نقوم باحتساب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة وفق المعادلة الآتية:

$$\begin{pmatrix}\text{التكلفة الحدية للخلايا}\\ \text{غير المستخدمة}\\ (\Delta_{ij})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{التكلفة المرتبطة}\\ \text{بتلك الخلية}\\ (C_{ij})\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{مجموع مؤشرات الصف والعمود}\\ \text{المرتبطة بتلك الخلية}\\ (U_i + V_j)\end{pmatrix}$$

٢. الخطوات من (٢ – ٤) هي نفس خطوات طريقة المسار المتعرج.

مثال (٣-٥): تملك أحدى شركات النفط العراقية ثلاثة حقول رئيسية لاستخراج النفط الخام في المناطق (A, B & C)، أما الطاقة الإنتاجية لهذهِ الحقول موضحة بالجدول أدناه، ترغب هذهِ الشركة في تلبية الطلب على منتجات هذهِ الحقول في أربع

مصافي رئيسية موزعة في مناطق مختلفة من العراق، كميات الطلب في هذهِ المصافي تم تقدير وفق الجدول الآتي:

الحقول	الطاقة الإنتاجية (العرض)
A	500
B	700
C	800
المجموع	2000

المصافي	عدد الوحدات المطلوبة (الطلب)
1	400
2	900
3	200
4	500
المجموع	2000

ولقد تم تقدير التكاليف المصاحبة لنقل الوحدة الواحدة من كل حقل إلى كل مصفى وفق الجدول الآتي:

من الحقول \ إلى المصافي	1	2	3	4
A	12	13	4	6
B	6	4	10	11
C	10	9	12	4

المطلوب:

١. أرسم شبكة تُمثل هذهِ المشكلة.

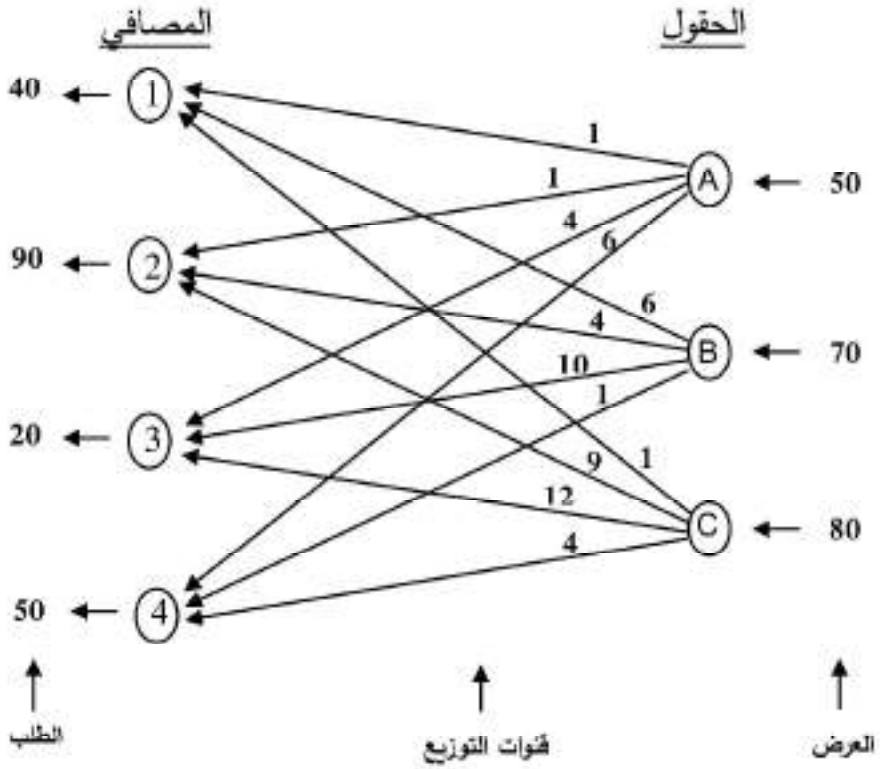
٢. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

٣. استخدم الطرق المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٤. استخدم طريقتي المسار المتعرج والتوزيع المُعدل لإيجاد الحل الأمثل.

الحل:

١. نبدأ برسم شكل يُمثل هذهِ المشكلة كما في الشكل الآتي:



٢. صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة أعلاه:

$$\text{Min. } Z = 12X_{11} + 13X_{12} + 4X_{13} + 6X_{14} + 6X_{21} + 4X_{22} + 10X_{23} + 11X_{24} + 10X_{31} + 9X_{32} + 12X_{33} + 4X_{34}$$

Sub. to

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \leq 500 \quad \text{(حقل A)}$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \leq 700 \quad \text{(حقل B)}$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} \leq 800 \quad \text{(حقل C)}$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41} = 400 \quad \text{(مصفى 1)}$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42} = 900 \quad \text{(مصفى 2)}$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43} = 200 \quad \text{(مصفى 3)}$$

$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44} = 800 \quad \text{(مصفى 4)}$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34} \geq 0$$

Or $(X_{ij} \geq 0 \; , i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3, 4)$

حيثُ يُمكن حل مسألة البرمجة الخطية أعلاه باستخدام طريقة السمبلكس المبسطة، وبسبب صعوبة الحل بهذهِ الطريقة لأن المسألة تتضمن العديد من متغيرات القرار، لهذا يفضل استخدام طرق الحل الخاصة بمشاكل النقل بعد إجراء بعض التعديلات اللازمة على النموذج أعلاه.

٣. نستخدم الطرق الثلاث لإيجاد الحل الأولي المقبول:

أ) نبدأ باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي المقبول بالشكل الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 400	13 100	4 /	6 /	500 100 0
B	6 /	4 700	10 /	11 /	700 0
C	10 /	9 100	12 200	4 500	800 700 500 0
الطلب	400 0	900 800 100 0	200 0	500 0	2000 2000

عدد الحلول المقبولة 6 - 1 - 4 + 3 - 1 - N + M وهي وفق القيم:

X_{11} = 400, X_{12} = 100, X_{22} = 700, X_{32} = 100, X_{33} = 200, X_{34} = 500

Min. Z= 12(400) + 13(100) + 4(700) + 9(100) + 12(200) + 4(500)=14200$

ب) أما الحل الأولي المقبول لطريقة أقل الكلف بالشكل الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 300	13 /	4 200	6 /	500 300 0
B	6 /	4 700	10 /	11 /	700 0
C	10 100	9 200	12 /	4 500	800 300 100 0
الطلب	400 300 0	900 200 0	200 0	500 0	2000 2000

عدد الحلول المقبولة 6 = 1 – 4 + 3 + N – 1 = M وهي وفق القيم:

$X_{11} = 300,\ X_{13} = 200,\ X_{22} = 700,\ X_{31} = 100,\ X_{32} = 200,\ X_{34} = 500$

Min. Z= 12(300) + 4(200) + 4(700) + 10(100) + 9(200) + 4(500) =12000$

ت) والحل الأولي المقبول لطريقة فوجل التقريبية بالشكل الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12	13	4 200	6 300	~~500~~ ~~300~~ 0
B	6	4 700	10	11	~~700~~ 0
C	10 400	9 200	12	4 200	~~800~~ ~~600~~ ~~400~~ 0
الطلب	~~400~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	2000 / 2000

كلف الجزاء
2 (6) -- --
2 2 2 2
5 5 5 1

كلف الجزاء				
	4	5	(6)	2
	4	5	---	2
	4	5	---	(7)
	4	(5)	---	---

عدد الحلول المقبولة 6 = 1 – 4 + 3 + N – 1 = M وهي وفق القيم:

$X_{13} = 200,\ X_{14} = 300,\ X_{22} = 700,\ X_{31} = 400,\ X_{32} = 200,\ X_{34} = 200$

Min. Z= 4(200) + 6(300) + 4(700) + 10(400) + 9(200) + 4(200) = 12000$

٤. استخدم طريقتي المسار المتعرج والتوزيع المُعدل لإيجاد الحل الأمثل:

أ) طريقة المسار المتعرج:

الخطوة الأولى (إيجاد التكاليف الحدية): من جدول الحل الأساسي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي نجد أن لدينا 6 خلايا غير مستخدمة وهي X_{13} ، X_{14}، X_{21}، X_{23}، X_{24}، X_{31}.

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 400	13 100	4 X_{13}	6	500
B	6	4 700	10	11	700
C	10	9 100	12 200	4 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

نحسب الكلف الحدية لجميع الخلايا غير المستخدمة بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{13}	$+ C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12}$	$+4 -12 +9 -13 = -12$
X_{14}	$+ C_{14} - C_{34} + C_{32} - C_{12}$	$+6 -4 +9 -13 = -2$
X_{21}	$+ C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22}$	$+6 -12 +13 -4 = +3$
X_{23}	$+ C_{23} - C_{33} + C_{32} - C_{22}$	$+10 -12 +9 -4 = +3$
X_{24}	$+ C_{24} - C_{34} + C_{32} - C_{22}$	$+11 -4 +9 -4 = +12$
X_{31}	$+ C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{32}$	$+10 -12 +13 -9 = +2$

من هنا نرى أن الحل الأولي المقبول ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمتين سالبتين لبعض الكلف الحدية وهي (12-) عند الخلية X_{13}، و(2-) عند الخلية X_{14}، وعلينا إيجاد حلاً جديداً.

الخطوة الثانية (اختيار الخانة غير المستخدمة): نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب، وهي الخلية X_{13} عند الموقع (A,3) ومقدارها (12-).

الخطوة الثالثة (إيجاد الجدول الجديد): نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{13} وهي 100 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (A,3) و (C,2) بمقدار 100 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (-) وهي الخلية (C,3) و (A,2) بمقدار 100 وحدة أيضاً، وينتج عن هذهِ العملية الجدول الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 — 400	13	4 — 100	6	500
B	6 — X_{21}	4 — 700	10	11	700
C	10	9 — 200	12 — 100	4 — 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة 6 = 1 – 4 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 400,\ X_{13} = 100,\ X_{22} = 700,\ X_{32} = 200,\ X_{33} = 100,\ X_{34} = 500$

Min. Z= 12(400) + 4(100) + 4(700) + 9(200) + 12(100) + 4(500) =13000$

نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت وأصبحت (13000$) مقارنة بالقيمة السابقة (14200$) لطريقة الركن الشمالي الغربي، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نُعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{12}	$+ C_{12} - C_{13} + C_{33} - C_{32}$	+13 -4 +12 -9 = +12
X_{14}	$+ C_{14} - C_{34} + C_{33} - C_{13}$	+6 -4 +12 -4 = +10
X_{21}	$+ C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{22}$	+6 -12 +4 -12 +9 -4 = -13
X_{23}	$+ C_{23} - C_{33} + C_{32} - C_{22}$	+10 -12 +9 -4 = +3
X_{24}	$+ C_{24} - C_{34} + C_{32} - C_{22}$	+11 -4 +9 -4 = +12
X_{31}	$+ C_{31} - C_{11} + C_{13} - C_{33}$	+10 -12 +4 -12 = -10

من أعلاه نرى أن الحل الأخير ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمتين سالبتين لبعض الكلف الحدية وهي (13-) عند الخلية X_{21}، و(10-) عند الخلية X_{31}، وعلينا إيجاد حلاً جديداً، نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب، وهي الخلية X_{21} عند الموقع (B,1) ومقدارها (13-).

نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من

الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (−) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{21} وهي 100 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (B,1)، (A,3) و (C,2) بمقدار 100 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (−) وهي الخلية (A,1)، (C,3) و (B,2) بمقدار 100 وحدة أيضاً، وينتج عن هذه العملية الجدول الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 300	13	4 200	6	500
B	6 100 (−)	4 600 (+)	10	11	700
C	10 (+) X_{31}	9 300 (−)	12	4 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ وهي وفق القيم:

$X_{11} = 300,\ X_{13} = 200,\ X_{21} = 100,\ X_{22} = 600,\ X_{32} = 300,\ X_{34} = 500$

Min. Z= 12(300) + 4(200) + 6(100) + 4(600) + 9(300) + 4(500) = 12100$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت وأصبحت (12100$) مقارنة بالقيمة السابقة (13000$)، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحديه
X_{12}	$+C_{12}-C_{22}+C_{21}-C_{11}$	+13 -4 +6 -12 = +3
X_{14}	$+C_{14}-C_{34}+C_{32}-C_{22}+C_{21}-C_{11}$	+6 -4 +9 -4 +6 -12 = +1
X_{23}	$+C_{23}-C_{21}+C_{11}-C_{13}$	+10 -6 +12 -4 = +12
X_{24}	$+C_{24}-C_{34}+C_{32}-C_{22}$	+11 -4 +9 -4 = +12
X_{31}	$+C_{31}-C_{21}+C_{22}-C_{32}$	+10 -6 +4 -9 = (-1)
X_{33}	$+C_{33}-C_{32}+C_{22}-C_{21}+C_{11}-C_{13}$	+12 -9 +4 -6 +12 -4 = +9

من أعلاه نرى أن الحل الأخير ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمة سالبة لإحدى الكلف الحدية وهي (1-) عند الخلية X_{31}، وعلينا إيجاد حلاً جديداً، نختار الخلية التي يصاحبها أكبر رقم سالب، وهي الخلية X_{31} عند الموقع (C,1) ومقدارها (1-).

نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{31} وهي 100 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (C,1) و (B,2) بمقدار 100 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (-) وهي الخلية (B,1) و (C,2) بمقدار 100 وحدة أيضاً، وينتج عن هذه العملية الجدول الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 300	13	4 200	6	500
B	6	4 700	10	11	700
C	10 100	9 200	12	4 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

عدد الحلول المقبولة 6 = 1 – 4 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 300,\ X_{13} = 200,\ X_{22} = 700,\ X_{31} = 100,\ X_{32} = 200,\ X_{34} = 500$

Min. Z= 12(300) + 4(200) + 4(700) + 10(100) + 9(200) + 4(500) = 12000$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت وأصبحت (12000$) مقارنة بالقيمة السابقة (12100$)، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Cost الكلف الحدية
X_{12}	$+C_{12}-C_{32}+C_{31}-C_{11}$	+13 -9 +10 -12 = +2
X_{14}	$+C_{14}-C_{34}+C_{31}-C_{11}$	+6 -4 +10 -12 = +0
X_{21}	$+C_{21}-C_{22}+C_{32}-C_{31}$	+6 -4 +9 -10 = +1
X_{23}	$+C_{23}-C_{22}+C_{32}-C_{31}+C_{11}-C_{13}$	+10 -4 +9 -10 +12 -4 = +13
X_{24}	$+C_{24}-C_{34}+C_{32}-C_{22}$	+11 -4 +9 -4 = +12
X_{33}	$+C_{33}-C_{31}+C_{11}-C_{13}$	+12 -10 +12 -4 = +10

بما أن جميع قيم الكلف الحدية أعلاه أكبر من أو تساوي صفراً، فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف الأخيرة (12000$) هي القيمة المثلى، والتي هي مساوية لما حصلنا عليه من طريقتي أقل الكلف وطريقة فوجل التقريبية من حيث قيمة دالة الهدف، رغم أنهما يختلفان من حيثُ ترتيب الخلايا المستخدمة، وبالتالي نستطيع القول (بالنسبة لهذهِ المشكلة) فإن طريقتي فوجل وأقل الكلف تعطينا حلاً أمثلاً بديلاً للحل الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة المسار المتعرج معاً.

يُمكن التعرف على وجود حل أمثل بديل بعد استخدام طريقة المسار المتعرج من خلال ظهور قيمة صفر لواحدة أو أكثر من التكاليف الحدية للخلايا غير المستخدمة التي نقوم بتقييمها في جدول الحل الأمثل، حيثُ نُلاحظ أن التكلفة الحدية في الخلية غير المستخدمة X_{14} تساوي صفراً، وهذا يعني أن هذهِ الخلية يُمكن أن تستخدم دون أن يؤثر ذلك على قيمة دالة الهدف.

ب) طريقة التوزيع المُعدل:

يجب التأكد من تحقق القاعدة (عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) – 1)، بالرجوع إلى جدول الحل الأولي المقبول لطريقة الركن الشمالي الغربي لهذا المثال:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12 400	13 100	4	6	500
B	6	4 700	10	11	700
C	10	9 100	12 200	4 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

نتحقق من أن عدد الحلول المقبولة (في الخلايا المستخدمة) تحقق القاعدة:

$$M + N - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

ونكون معادلات لحساب الكلف الحدية للخلايا المستخدمة في جدول الحل الأولي المقبول أعلاه، ونفترض أن قيمة المؤشر ($U_1=0$) كما في الجدول الآتي:

Occupied Cell الخلايا المستخدمة	Unit's Cost تكلفة الوحدة	The equation المعادلة
X_{11}	12	$C_{11} - U_1 + V_1 \rightarrow 12 - 0 + V_1 \rightarrow V_1 - 12$
X_{12}	13	$C_{12} - U_1 + V_2 \rightarrow 13 - 0 + V_2 \rightarrow V_2 - 13$
X_{22}	4	$C_{22} - U_2 + V_2 \rightarrow 4 - U_2 + 13 \rightarrow U_2 - -9$
X_{32}	9	$C_{32} - U_3 + V_2 \rightarrow 9 - U_3 + 13 \rightarrow U_3 - -4$
X_{33}	12	$C_{33} - U_3 + V_3 \rightarrow 12 - -4 + V_3 \rightarrow V_3 - 16$
X_{34}	4	$C_{34} - U_3 + V_4 \rightarrow 4 - -4 + V_4 \rightarrow V_4 - 8$

يتم وضع هذهِ القيم على جدول النقل كما يأتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض	U_i
A	12 400	13 100	4 X_{13}	6	500	$U_1 = 0$
B	6	4 700	10	11	700	$U_2 = -9$
C	10	9 100	12 200	4 500	800	$U_3 = -4$
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000	
V_j	$V_1 = 12$	$V_2 = 13$	$V_3 = 16$	$V_4 = 8$		

نحسب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة وفق المعادلة التالية ونضعها في الجدول أعلاه:

(التكلفة الحدية) = (التكلفة) − (مجموع مؤشرات الصف)

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\Delta_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 4 - 0 - 16 = -12$$

$$\Delta_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 6 - 0 - 8 = -2$$

$$\Delta_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 6 - (-9) - 12 = +3$$

$$\Delta_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 10 - (-9) - 16 = +3$$

$$\Delta_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 11 - (-9) - 8 = +12$$

$$\Delta_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 10 - (-4) - 12 = +2$$

والآن نقوم باختيار أقل تكلفة حدية وهي ($\Delta_{13} = -12$) ، ثم نقوم بتحديد أكبر كمية يُمكن نقلها إلى هذهِ الخلية وهي 100 وحدة، وذلك بتشكيل المسار المتعرج مبتدئين بالخلية X_{13} ونضع فيها أشارة (+)، ثم نختار خلية مستخدمة في نفس العمود وهي X_{33} ونضع فيها أشارة (−) ونطرح منها 100، ثم نختار خلية مستخدمة في نفس الصف وهي X_{32} ونضع فيها أشارة (+) وننقل إليها الكمية 100، ثم نختار خلية مستخدمة أخرى في نفس العمود وهي X_{12} ونضع فيها أشارة (−) ونطرح منها 100، بهذا تم تشكيل مسار متعرج مغلق كما في جدول النقل السابق، وبعد نقل هذهِ الكمية فإننا نحصل على الجدول الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض	U_i
A	12 400	13	4 100	6	500	$U_1 = 0$
B	6	4 700	10	11	700	$U_2 = 3$
C	10 X_{31}	9 200	12 100	4 500	800	$U_3 = 8$
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000	
V_j	$V_1 = 12$	$V_2 = 1$	$V_3 = 4$	$V_4 = -4$		

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ وهي وفق القيم:

$X_{11} = 400,\ X_{13} = 100,\ X_{22} = 700,\ X_{32} = 200,\ X_{33} = 100,\ X_{34} = 500$

Min. Z= 12(400) + 4(100) + 4(700) + 9(200) + 12(100) + 4(500) =13000$

نقوم الآن بحساب الكلف الحدية للخلايا المستخدمة في جدول الحل الأولي المقبول أعلاه، ونفترض أن قيمة المؤشر ($U_1=0$) كما في الجدول الآتي:

Occupied Cell الخلايا المستخدمة	Unit's Cost تكلفة الوحدة	The equation المعادلة
X_{11}	12	$C_{11} = U_1 + V_1 \rightarrow 12 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 12$
X_{13}	4	$C_{13} = U_1 + V_3 \rightarrow 4 = 0 + V_3 \rightarrow V_3 = 4$
X_{22}	4	$C_{22} = U_2 + V_2 \rightarrow 4 = ? + ? \rightarrow 4 = U_2 + 1 \rightarrow U_2 = 3$
X_{32}	9	$C_{32} = U_3 + V_2 \rightarrow 9 = ? + ? \rightarrow 9 = 8 + V_2 \rightarrow V_2 = 1$
X_{33}	12	$C_{33} = U_3 + V_3 \rightarrow 12 = U_3 + 4 \rightarrow U_3 = 8$
X_{34}	4	$C_{34} = U_3 + V_4 \rightarrow 4 = 8 + V_4 \rightarrow V_4 = -4$

والآن نحسب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة:

$\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\Delta_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 13 - 0 - 1 = +12$

$\Delta_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 6 - 0 - (-4) = +10$

$\Delta_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 6 - 3 - 12 = -9$

$\Delta_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 10 - 3 - 4 = +3$

$\Delta_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 11 - 3 - (-4) = +12$

$\Delta_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 10 - 8 - 12 = -10$

ثم نقوم باختيار أقل تكلفة حدية وهي ($\Delta_{31} = -10$) ، وتحديد أكبر كمية يُمكن نقلها إلى هذه الخلية وهي 100 وحدة، ونشكل المسار المتعرج المغلق كما في جدول النقل السابق، وبعد نقل هذه الكمية فإننا نحصل على الجدول الآتي:

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض	U_i
A	12 300	13	4 200	6	500	$U_1 = 0$
B	6	4 700	10	11	700	$U_2 = -7$
C	10 100	9 200	12	4 500	800	$U_3 = -2$
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000	
V_j	$V_1 = 12$	$V_2 = 11$	$V_3 = 4$	$V_4 = 6$		

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ وهي وفق القيم:

$X_{11} = 300,\ X_{13} = 200,\ X_{22} = 700,\ X_{31} = 100,\ X_{32} = 200,\ X_{34} = 500$

Min. Z= $12(300) + 4(200) + 4(700) + 10(100) + 9(200) + 4(500) = 12000\$$

نقوم الآن بحساب الكلف الحدية للخلايا المستخدمة في جدول الحل أعلاه، ونفترض أن قيمة المؤشر ($U_1=0$) كما في الجدول الآتي:

Occupied Cell الخلايا المستخدمة	Unit's Cost تكلفة الوحدة	The equation المعادلة
X_{11}	12	$C_{11} = U_1 + V_1 \rightarrow 12 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 12$
X_{13}	4	$C_{13} = U_1 + V_3 \rightarrow 4 = 0 + V_3 \rightarrow V_3 = 4$
X_{22}	4	$C_{22} = U_2 + V_2 \rightarrow 4 = ? + ? \rightarrow 4 = U_2 + 11 \rightarrow U_2 = -7$
X_{31}	10	$C_{31} = U_3 + V_1 \rightarrow 10 = U_3 + 12 \rightarrow U_3 = -2$
X_{32}	9	$C_{32} = U_3 + V_2 \rightarrow 9 = -2 + V_2 \rightarrow V_2 = 11$
X_{34}	4	$C_{34} = U_3 + V_4 \rightarrow 4 = -2 + V_4 \rightarrow V_4 = 6$

ثم نحسب التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة:

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\Delta_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 13 - 0 - 11 = +2$$

$$\Delta_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 6 - 0 - 6 = 0$$

$$\Delta_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 6 - (-7) - 12 = +1$$

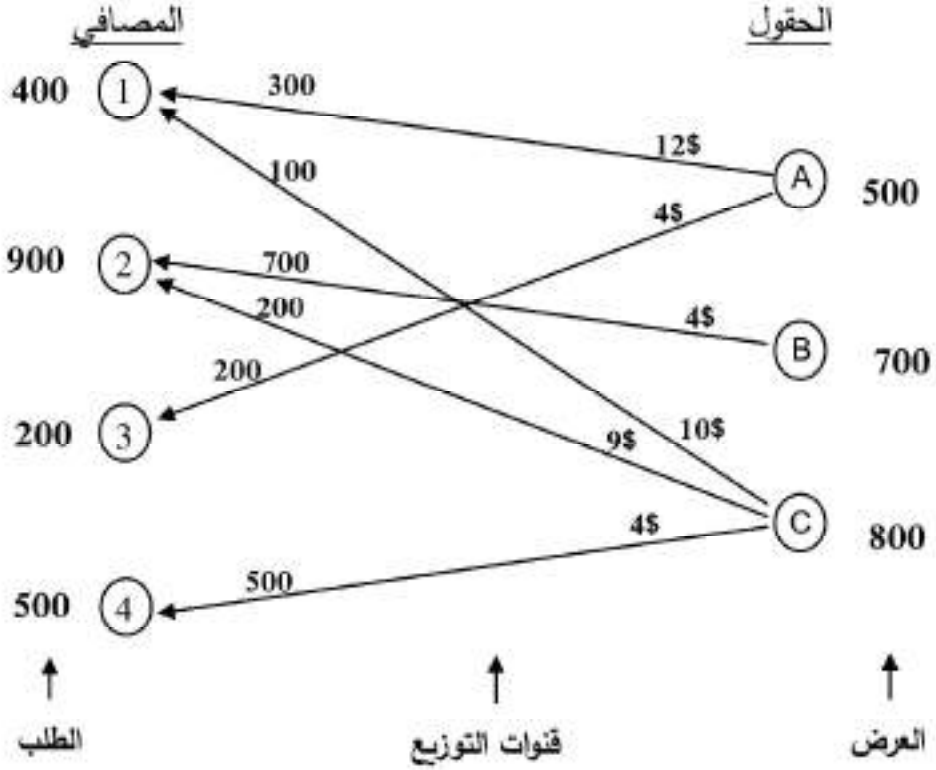
$$\Delta_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 10 - (-7) - 4 = +13$$

$$\Delta_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 11 - (-7) - 6 = +12$$

$$\Delta_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 12 - (-2) - 4 = +10$$

طالما أن جميع التكاليف الحدية للخلايا غير المستخدمة أكبر من أو تساوي صفراً، هذا يعني أن جدول الحل الأخير هو جدول الحل الأمثل، واقل تكلفة لمشكلة النقل هذهِ هي ١٢٠٠٠ دولار.

ولإكمال الشكل النهائي لحل المسألة فإننا نرسم شكل يُمثل هذهِ المشكلة معتمدين على الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه أعلاه كما في الشكل التالي والذي يوضح كيفية توزيع كميات العرض وإلى أي مصفى سيتم أعطاء هذهِ العروض، كذلك كيف يستلم كل مصفى حصتهِ ومن أي حقل كي يلبي احتياجاته من النفط:



٣-٦ الحالات الخاصة في مشاكل النقل[١] [٢] [٣] Special Cases In T.P.

٣-٦-١ مشكلة النقل غير المتوازنة Unbalanced T.P.

عندما يكون العرض الكلي أقل من الطلب الكلي، فإن جميع الأنواع عند المصدر سيتم شحنها، إلا أن أحدى نقاط الوصول أو أكثر سوف تظل غير مكتفية، ولهذا فإننا نقوم بإضافة صف وهمي يحتوي الفرق بين الطلب والعرض من أجل مساواتهما، وتكون التكاليف في هذا الصف صفراً، ويحتوي هذا الصف على الفرق بين

---

(١) **المصدر السابق**، ص٣٣١.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٩.

(٣) باري رندر، ورالف ستير، وناجراج بالاكريشان، **مصدر سبق ذكره**،، ص ٢٩٠.

العرض الفعلي والطلب الفعلي، لأنه من الناحية العملية لن يتم اشباع هذا الطلب لأنة لا يوجد كمية كافية فعلية في جانب العرض لمقابلة هذا الطلب.

من الضروري الإشارة إلى أهمية إهمال الصف أو العمود الوهمي عند أتباع طريقة أقل الكلف في الحصول على الحل الأولي المقبول، إذ إننا نبحث عن أقل تكلفة في الجدول دون النظر إلى القيم الصفرية الموجودة في هذا الصف أو العمود الوهمي، على أن يتم ملء خلايا هذا الصف أو العمود بعد ملء خلايا الجدول الفعلية وذلك طالما أن تكلفة النقل إليه صفراً دائماً.

كذلك يُفضل عند استخدام طريقة فوجل التقريبية أن نحدد الفروق لكل صف وعمود (لحساب كلف الجزاء) بغض النظر عن تكلفة الصف أو العمود الوهمي.

مثال (٣-٦): أوجد الحل الأولي المقبول لمسألة النقل التالية بطريقتي الركن الشمالي الغربي وأقل الكلف:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	7	0	10	4	10
B	2	8	0	6	25
Demand	20	15	10	5	35 / 50

الحل: نُلاحظ أن العرض الكلي (=35) ≠ الطلب الكلي (=50)، ولجعل المسألة متزنة يتم إضافة مصدر (صف) وهمي ((Dummy Row (C بتكاليف صفرية، ويحتوي هذا الصف على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها (15 = 35 - 50) وحدة، بعد

إجراء عملية الموازنة بين كميتي العرض والطلب يُمكن إيجاد الحل الأولي المقبول بالطرق الآتية:

١. ايجاد الحل الأولي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	7 [10]	0 [ε]	10 [/]	4 [/]	~~10~~ 0
B	2 [10]	8 [15]	0 [/]	6 [/]	~~25~~ ~~15~~ 0
C_{Dummy}	0 [/]	0 [/]	0 [10]	0 [5]	~~15~~ ~~5~~ 0
Demand	~~20~~ ~~10~~ 0	~~15~~ 0	~~10~~ 0	~~5~~ 0	50 / 50

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 5 ولا تحقق العلاقة $(M + N) - 1 = (3 + 4) - 1 = 6$ أي أن الحل مفكك أو منحل، ولكي يصبح الحل مقبولاً يجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (A,2)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

$X_{A1}=10,\ X_{A2}=\varepsilon,\ X_{B1}=10,\ X_{B2}=15,\ X_{C3}=10,\ X_{C4}=5$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 7(10) + 0(0) + 2(10) + 8(15) + 0(10) + 0(5) = 210$$

٢. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة أقل الكلف:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	7	0 10	10	4	~~10~~ 0
B	2 15	8	0 10	6	~~25~~ ~~15~~ 0
C_{Dummy}	0 5	0 5	0	0 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
Demand	~~20~~ ~~5~~ 0	~~15~~ ~~5~~ 0	~~10~~ 0	~~5~~ 0	50 / 50

عدد الحلول المقبولة 6 وهي وفق القيم:

$X_{A2}=10,\ X_{B1}=15,\ X_{B3}=10,\ X_{C1}=5,\ X_{C2}=5,\ X_{C4}=5$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 0(10) + 2(15) + 0(10) + 0(5) + 0(5) + 0(5) = 30$$

وهذه القيمة أقل مما هي عليه في طريقة الركن الشمالي الغربي، ونُلاحظ أن عملية توزيع الوحدات على الخلايا ذات التكلفة الأقل في طريقة أقل الكلف في المثال السابق، قد تمت بغض النظر عن الخلايا ذات التكلفة الصفرية في الصف الوهمي (C_{dummy})، حيثُ نهتم بتخصيص الوحدات في الخلايا الأصلية أولاً، ويتم التخصيص للخلايا في الصف الوهمي في نهاية المطاف.

الحالة الثانية هي زيادة العرض الكلي عن الطلب الكلي الذي يكفي تماماً نقطة الوصول، إذ إن بعض البضائع المنتجة في أحد المصادر أو أكثر من مصدر قد لا يحتاج الأمر لشحنها ومعنى هذا بقاء هذه الأنواع في المصدر أو المصادر التي

أنتجتها، في هذهِ الحالة فإننا نقوم بإضافة عمود وهمي يحتوي الفرق بين الطلب والعرض من أجل مساواتهما وتكون التكاليف في هذا العمود صفراً، ويحتوي هذا العمود على الفرق بين العرض الفعلي والطلب الفعلي، لأنه من الناحية العملية لن يتم نقل هذه الكمية وتبقى تكاليف نقلها = صفراً، لأنه لا يوجد طلب لمقابلة هذهِ الكمية.

مثال (٣-٧): أوجد الحل الأولي المقبول لمسألة النقل التالية بطريقتي الركن الشمالي الغربي وفوجل التقريبية:

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
A	10	2	0	15
B	5	3	7	30
C	2	0	4	25
Demand	5	25	20	70 / 50

الحل: نُلاحظ أن العرض الكلي (=70) ≠ الطلب الكلي (=50)، ولجعل المسألة متزنة يتم إضافة مركز استهلاك (عمود) وهمي ((4) Dummy Column) بتكاليف صفرية، ويحتوي هذا العمود على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها (20 = 50-70) وحدة، بعد إجراء عملية الموازنة بين كميتي العرض والطلب يُمكن إيجاد الحل الأولي المقبول بالطرق الآتية:

١. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	10 5	2 10	0 /	0 /	~~15~~ ~~10~~ 0
B	5 /	3 15	7 15	0 /	~~30~~ ~~15~~ 0
C	2 /	0 /	4 5	0 20	~~25~~ ~~20~~ 0
Demand	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~20~~ ~~5~~ 0	~~20~~ 0	70 / 70

عدد الحلول المقبولة 6 وهي وفق القيم:

$X_{A1}=5,\ X_{A2}=10,\ X_{B2}=15,\ X_{B3}=15,\ X_{C3}=5,\ X_{C4}=20$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 10(5) + 2(10) + 3(15) + 7(15) + 4(5) + 0(20) = 240$$

٢. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة فوجل التقريبية:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
A	[10]	[2]	[0] 15	[0]	~~15~~ 0
B	[5] 5	[3]	[7] 5	[0] 20	~~30~~ ~~25~~ ~~20~~ 0
C	[2] ε	[0] 25	[4]	[0]	~~25~~ 0
Demand	~~5~~ 0	~~25~~ 0	~~20~~ ~~5~~ 0	~~20~~ 0	70

كلف الجزاء
2 —
2 2
2 2

كلف الجزاء	3	2	(4)	0
	3	(3)	3	0

نلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 5 حلول ولا تحقق العلاقة 6 =1- (4+ 3)= 1- (M +N) أي أن الحل مفكك ويجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (C,1)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

X_{A3}=15, X_{B1}=5, X_{B3}=5, X_{B4}=20, X_{C1}= ε, X_{C2}=25

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 0 (15) + 5 (5) + 7 (5) + 0 (20) + 2 (0) + 0 (25) = 60.

٣-٦-٢ مشكلة تعظيم الإرباح The Problem Of Maximizing Profits

لقد تطرقنا سابقاً إلى كيفية استخدام نموذج النقل للوصول إلى أدنى مستوى ممكن لتكاليف النقل الكلية، لكن قد لا يكون الاختلاف في تكلفة نقل الوحدة من المنتج هي المبرر الوحيد للبحث عن طريقة مناسبة لتحديد الكميات المثلى التي يجب نقلها من مناطق الإنتاج إلى مراكز التوزيع، فقد تُقيم بعض المنشآت مصانعها في مناطق متفرقة لإنتاج منتجات متماثلة ولكن بتكاليف إنتاج متفاوتة نتيجة الاختلاف في تكاليف شراء المواد الخام، والاختلاف في الكفاءة الإنتاجية للعمال وعوامل أخرى عديدة[١].

أضف إلى ذلك فإن بعض المصانع قد لا تبيع منتجاتها بأسعار موحدة في جميع مراكز التسويق بسبب الاختلاف بين مراكز التوزيع في ظروف المنافسة والطلب وتكاليف النقل، ولهذا لا تكون تكاليف النقل هي العامل الوحيد المؤثر على الأرباح ولكن تتأثر الأرباح بتكاليف الإنتاج وأسعار البيع وتكاليف النقل، ولهذا قد يكون تعظيم الأرباح هو الهدف المناسب للمصنع أضافة إلى تخفيض تكلفة النقل.

يُمكن استخدام نموذج النقل سواء كانت المشكلة المراد حلها تهدف إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح وذلك بسبب توفر خصائص مشكلة النقل، والتي تتمثل في وجود طاقات محدودة لمصادر الأنتاج (المصانع) واحتياجات محدودة للغايات (مخازن أو مراكز التوزيع)، وهدف محدد نسعى إلى تحقيقه.

---

(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٤٠.

لهذا يُمكن استخدام نفس الأسلوب والخطوات السابقة على مسائل تخفيض تكاليف النقل، لتطبيقها على مشاكل تعظيم الأرباح ولكن مع مراعاة الاختلافات والفروق الآتية:

١. إذا كان الهدف هو تعظيم الأرباح فإننا نضع ربح الوحدة المنقولة من مصنع معين إلى مركز بيع معين في المربع الصغير الذي يظهر في أعلى يسار كل خلية بجدول النقل، وذلك بدلاً من تكلفة نقل الوحدة، ويحسب ربح الوحدة المنقولة وفق المعادلة الآتية:

$$\begin{pmatrix}\text{ربح الوحدة}\\ \text{الواحدة}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{سعر بيع}\\ \text{الوحدة}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{التكلفة الكلية للوحدة (تكلفة النقل}\\ \text{وأي تكاليف أخرى)}\end{pmatrix}$$

٢. باستطاعتنا تطبيق نفس طرق الحل الأولي المقبول التي تم استخدامها سابقاً مع مشاكل تخفيض التكاليف وعلى النحو الآتي:

- تطبيق طريقة الركن الشمالي الغربي بنفس الأسلوب والخطوات دون أي اختلافات.
- طريقة أقل تكلفة تصبح طريقة أقصى ربح، حيثُ يتم البدء أولاً باستخدام الخلية ذات الربحية الأكبر للوحدة ثم الخلية التي تقل عنها مباشرة في الربح وهكذا.
- تطبيق طريقة فوجل التقريبية بنفس الأسلوب والخطوات السابقة حيثُ يتم حساب الفرق بين الخلية ذات الربحية الأكبر للوحدة والربح الذي يقل عنهُ مباشرة وذلك عند حساب كلف الجزاء للصفوف والأعمدة،

ويتم التخصيص للخلية ذات الربحية الأكبر بالصف أو العمود صاحب أكبر فرق ربح.

٣. يُمكن استخدام طريقة المسار المتعرج والتوزيع المُعدل لاختبار أمثلية الحل في مشاكل تعظيم الأرباح بنفس الأسلوب والخطوات السابقة، ولكن الاختلاف يكون في تقييم كل خلية فارغة على أساس النتائج المترتبة من استخدام هذهِ الخلية بوحدة من المنتج، حيثُ تُعطى الأولوية للخلية صاحبة أكبر رقم تغير موجب في الأرباح في دالة الهدف، مما يساهم ذلك في زيادة قيمة دالة الهدف، وبالطبع فإن الخلايا ذات الرقم السالب لا يتم استخدامها لأن النقل إليها سيؤدي إلى تخفيض الأرباح.

٤. على خلاف مشاكل التخفيض فأننا نحصل على الحل الأمثل في مشاكل التعظيم إذا كانت التكلفة الحدية لجميع الخلايا غير المستخدمة سالبة، أما إذا وجدت تكلفة فرصة موجبة أو صفراً لخلية غير مستخدمة أو أكثر فهذا يعني أن الحل الذي يتم اختباره ليس هو الحل الأمثل.

مثال (٣-٨): تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتج واحد في ثلاثة مصانع (1، 2، 3) تقع في مناطق مختلفة، وتقوم المنشأة بتوزيع إنتاجها من هذا المنتج على ثلاثة مراكز توزيع مختلفة (1، 2، 3)، وفيما يلي البيانات الخاصة بالطاقة الإنتاجية المتوقعة للمصانع الثلاثة، وكذلك الاحتياجات المتوقعة لمراكز التوزيع من هذا المنتج خلال الفترة المالية القادمة[1]:

---

(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٤٩.

المصنع	الطاقة الإنتاجية المتوقعة (العرض)
1	500 وحدة
2	3000 وحدة
3	3500 وحدة
إجمالي الطاقات	7000 وحدة

مركز التوزيع	احتياجات مراكز التوزيع (الطلب)
1	1500 وحدة
2	2000 وحدة
3	2500 وحدة
إجمالي الاحتياجات	6000 وحدة

وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المنتج من المصانع إلى مراكز التوزيع المختلفة (بالدولار) كما يأتي:

من المصنع \ إلى مراكز التوزيع	1	2	3
1	4	6	5
2	3	6	4
3	2	8	5

وتبلغ تكلفة إنتاج الوحدة من المنتج في المصانع الثلاثة بالترتيب (17، 16، 18) دولار كما تبلغ أسعار بيع الوحدة من المنتج في مراكز التوزيع الثلاثة بالترتيب (25، 30، 27) دولار.

المطلوب: تحديد خطة النقل المثلى التي يترتب عليها تحقيق أقصى ربح مُمكن للمنشأة مستخدماً طرق الحل الأولي المقبول المتاحة لديك، ثم استخدم طريقة المسار المتعرج لإيجاد الحل الأمثل.

الحل:

نظراً لأن هدف المنشأة يتمثل في تعظيم الأرباح فإننا نحتاج إلى بيانات خاصة بربح كل وحدة تنقل من المصانع إلى مراكز الإنتاج وسنرمز لربح الوحدة بالرمز (C_{ij})، ويحسب ربح الوحدة من المعادلة الآتية:

ربح الوحدة (C) = سعر البيع – (تكلفة الإنتاج للوحدة + تكلفة النقل)

وعلى هذا الأساس يُحسب ربح الوحدة بالنسبة للمصانع المختلفة إلى مراكز التوزيع المختلفة كما يأتي:

المصنع 1:
$C_{11} = 25 - (17 + 4) = 4\ \$$
$C_{12} = 30 - (17 + 6) = 7\ \$$
$C_{13} = 27 - (17 + 5) = 5\ \$$

المصنع 2:
$C_{21} = 25 - (16 + 3) = 6\ \$$
$C_{22} = 30 - (16 + 6) = 8\ \$$
$C_{23} = 27 - (16 + 4) = 7\ \$$

المصنع 3:
$C_{31} = 25 - (18 + 2) = 5\ \$$
$C_{32} = 30 - (18 + 8) = 4\ \$$
$C_{33} = 27 - (18 + 5) = 4\ \$$

من بيانات المنشأة نُلاحظ أن مجموع الكميات المنتجة (=7000) وحدة ≠ مجموع الكميات المطلوبة لمراكز التوزيع (=6000) وحدة، ولجعل المسألة متزنة يتم إضافة مركز توزيع (عمود) وهمي ((Dummy Column (4) بربحية صفرية، هذا العمود يُمثل مركز توزيع وهمي يتلقى الفائض من الإنتاج لدى المصانع، ويحتوي هذا العمود

على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها(1000 = 6000–7000) وحدة، بعد إجراء عملية الموازنة بين كميتي العرض والطلب يُمكن إيجاد الحل الأولي المقبول بالطرق الآتية:

١. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي لتعظيم الربح:

مراكز التوزيع / المصنع	1	2	3	4	إجمالي الطاقات
1	4 [500]	7 [ε]	5 [/]	0 [/]	~~500~~ 0
2	6 [1000]	8 [2000]	7 [/]	0 [/]	~~3000~~ ~~2000~~ 0
3	5 [/]	4 [/]	4 [2500]	0 [1000]	~~3500~~ ~~1000~~ 0
إجمالي الاحتياجات	~~1500~~ ~~1000~~ 0	~~2000~~ 0	~~2500~~ 0	~~1000~~ 0	7000 / 7000

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 5 حلول ولا تحقق العلاقة 6 –1–(3 + 4)–1–(M + N) أي أن الحل مفكك لهذا يتم إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات الربحية الأكبر وهي الخلية (1,2)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

$X_{11} = 500,\ X_{12} = \varepsilon = 0,\ X_{21} = 1000,\ X_{22} = 2000,\ X_{33} = 2500,\ X_{34} = 1000$

أما الربح الكلي فيتم حسابه بالشكل:

Max. Z= 4 (500)+ 7 (0)+ 6 (1000)+ 8 (2000)+ 4 (2500)+ 0 (1000)=34000$

٢. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة أقصى الأرباح لتعظيم الربح:

وفقاً لهذه الطريقة يتم البدء باستخدام الخلية صاحبة أكبر ربح للوحدة أولاً ثم الخلية التي تقل عنها مباشرة في الربح وهكذا حتى ننتهي من تلبية احتياجات كل مراكز التوزيع واستنفاد كل طاقات المصانع، مع إغفال النظر لخلايا العمود الوهمي عند المقارنة بين الخلايا كما في الجدول الآتي:

مراكز التوزيع / المصنع	1	2	3	4	إجمالي الطاقات
1	4	7	5 500	0	500 0
2	6	8 2000	7 1000	0	3000 1000 0
3	5 1500	4	4 1000	0 1000	3500 2000 1000 0
إجمالي الاحتياجات	1500 0	2000 0	2500 1500 1000 0	1000 0	7000 / 7000

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 6 حلول وتحقق العلاقة $(M + N)-1 = (3 + 4)-1 = 6$ والتي هي وفق القيم:

$X_{13} = 500, X_{22} = 2000, X_{23} = 1000, X_{31} = 1500, X_{33} = 1000, X_{34} = 1000$

أما الربح الكلي فيتم حسابه بالشكل:

Max. Z=5 (500)+8 (2000)+7 (1000)+5 (1500)+4 (1000)+0 (1000) =37000$

حيثُ نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت مقارنة مع طريقة الركن الشمالي الغربي ذات القيمة ($34000).

٣. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة فوجل التقريبية لتعظيم الربح:

وفقاً لهذه الطريقة يتم حساب الفرق بين أكبر ربح للوحدة والربح الذي يقل عنهُ مباشرة وذلك عند حساب كلف الجزاء للصفوف والأعمدة، ويتم التخصيص للخلية صاحبة أكبر ربح بالصف أو العمود صاحب أكبر فرق ربح، مع إغفال النظر عن خلايا الصف أو العمود الوهمي عند المقارنة بين الخلايا كما في الجدول الآتي:

مراكز التوزيع / المصنع	1	2	3	4	إجمالي الطاقات
1	4 /	7 500	5 /	0 /	500 0
2	6 /	8 1500	7 1500	0 /	3000 1500 0
3	5 1500	4 /	4 1000	0 1000	3500 2000 1000 0
إجمالي الاحتياجات	1500 0	2000 0	2500 1500 1000 0	1000 0	7000 7000

كلف الجزاء
(2) - -
1 1 1
1 1 1

كلف الجزاء				
	1	1	2	0
	1	(4)	3	0
	1	--	(3)	0

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 6 وتحقق العلاقة $6 - 1 - (3 + 4) - 1 - (M + N)$ والتي هي وفق القيم:

$X_{13} - 500, X_{22} - 2000, X_{23} - 1000, X_{31} - 1500, X_{33} - 1000, X_{34} - 1000$

أما الربح الكلي فيتم حسابه بالشكل:

Max. Z=7(500)+ 8(1500)+ 7(1500)+ 5(1500)+ 4(1000)+ 0(1000)=37500$

حيثُ نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت مقارنة مع طريقة الركن الشمالي الغربي ذات القيمة ($34000)، وطريقة أقصى ربح ذات القيمة ($37000).

٤. اختبار مثالية الحل الأولي المقبول بطريقة المسار المتعرج لتعظيم الربح:

يتم اختبار مثالية الحل في مشاكل التعظيم بإتباع نفس الخطوات السابقة في مشاكل تخفيض التكاليف، ونفس الخطوات التي اعتمدت في طريقة المسار المتعرج كما يأتي:

الخطوة الأولى (إيجاد الأرباح الحدية): سيتم حساب الأرباح الحدية بالاعتماد على ما توصلنا إليه من طريقة أقصى الأرباح لأنها قد أعطت قيمة جيده مقارنة بطريقة الركن الشمالي الغربي، ومن جدول الحل الأساسي المقبول بطريقة أقصى الأرباح نجد أن لدينا 6 خلايا غير مستخدمة وهي X_{11} ، X_{12}، X_{14}، X_{21}، X_{24}، X_{32}.

مراكز التوزيع / المصنع	1	2	3	4	إجمالي الطاقات
1	4	7 X_{12}	5 500	0	500
2	6	8 2000	7 1000	0	3000
3	5 1500	4	4 1000	0 1000	3500
إجمالي الاحتياجات	1500	2000	2500	1000	7000 / 7000

نحسب الربح الحدي لجميع الخلايا غير المستخدمة بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Profit الربح الحدي
X_{11}	$+C_{11}-C_{13}+C_{33}-C_{31}$	+4 −5 +4 −5 = −2
X_{12}	$+C_{12}-C_{13}+C_{23}-C_{22}$	+7 −5 +7 −8 = (+1)
X_{14}	$+C_{14}-C_{34}+C_{33}-C_{13}$	+0 −0 +4 −5 = −1
X_{21}	$+C_{21}-C_{23}+C_{33}-C_{31}$	+6 −7 +4 −5 = −2
X_{24}	$+C_{24}-C_{34}+C_{33}-C_{23}$	+0 −0 +4 −7 = −3
X_{32}	$+C_{32}-C_{22}+C_{23}-C_{33}$	+4 −8 +7 −4 =−1

من هنا نرى أن الحل الأولي المقبول ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمة موجبة هي (+1) عند الخلية X_{12} وعلينا إيجاد حلاً جديداً، وهذا يعني أن استخدام هذهِ الخلية في الحل الجديد سوف يُضيف إلى الأرباح مبلغ (1$) عن كل وحدة تخصص إلى هذهِ الخلية، أما استخدام باقي الخلايا فإن من شأنهِ تخفيض الأرباح.

الخطوة الثانية (إيجاد الجدول الجديد): نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (−) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{13} وهي 500 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (1,2) و (2,3) بمقدار 500 وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (−) وهي الخلية

(1,3) و (2,2) بمقدار 500 وحدة أيضاً، هذا وتظل باقي خلايا الجدول كما هي بدون تغيير وينتج عن هذه العملية الجدول الآتي:

مراكز التوزيع / المصنع	1	2	3	4	إجمالي الطاقات
1	4	7 500	5	0	500
2	6	8 1500	7 1500	0	3000
3	5 1500	4	4 1000	0 1000	3500
إجمالي الاحتياجات	1500	2000	2500	1000	7000 / 7000

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ وفق القيم:

$X_{12} = 500,\ X_{22} = 1500,\ X_{23} = 1500,\ X_{31} = 1500,\ X_{33} = 1000,\ X_{34} = 1000$

Max. Z =7(500)+ 8(1500)+ 7(1500)+ 5(1500)+ 4(1000)+ 0(1000)=37500$

نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت بمقدار (500$) وأصبحت (37500$) مقارنة بالقيمة السابقة (37000$) لطريقة أقصى الأرباح، ومساوية لقيمة طريقة فوجل اتي أثبتت كفاءتها في إعطاء قيمة مكافئة لقيمة الحل الأمثل.

إن مقدار التحسن (500$) في الطريقة أعلاه يعادل عدد الوحدات المخصصة للخلية (1,2) ومقدارها 500 وحدة مضروبة في الربح الحدي لهذه الخلية (1$)، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نُعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Profit الربح الحدي
X_{11}	$+ C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{23} + C_{33} - C_{31}$	+4 −7 +8 −7 +4 −5 = −3
X_{13}	$+ C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12}$	+5 −7 +8 −7 = −1
X_{14}	$+ C_{14} - C_{34} + C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{12}$	+0 −0 +4 −7 +8 −7 = −2
X_{21}	$+ C_{21} - C_{23} + C_{33} - C_{31}$	+6 −7 +4 −5 = −2
X_{24}	$+ C_{24} - C_{34} + C_{33} - C_{23}$	+0 −0 +4 −7 = −3
X_{32}	$+ C_{32} - C_{22} + C_{23} - C_{33}$	+4 −8 +7 −4 =−1

بما أن جميع قيم الربح الحدي أعلاه سالبة فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف الأخيرة ($37500) هي القيمة المثلى.

٣-٦-٣ مشكلة التفكك Disintegration Problem

إن طريقة المسار المتعرج والتوزيع المعدل تستخدم للحصول على الحل الأمثل، ويجب التحقق من تطبيق القاعدة الآتية:

عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف (M) + عدد الأعمدة (N) − 1

وفي حالة عدم التحقق وحصولنا على عدد خلايا أقل من (M+N−1) فإن حالة من التفكك أو الانحلال تحدث لمشكلة النقل، هذه الحالة تحدث في الحل الأولي المقبول أو في أي مرحلة وسطية من مراحل الحل، ولمعالجة هذه الحالة فإننا نقوم بافتراض خلية غير مستخدمة وهمية (مصطنعة) تحمل القيمة صفر ونضع الرمز ($\varepsilon \cong 0$)، وأحياناً قد يكون هنالك خليتان أو أكثر نضطر لاعتبارهما خلايا مستخدمة وهمية، وهذا يعتمد على الفرق بين عدد الخلايا المستخدمة وقيمة القاعدة (M+N−1).

إن حالة التفكك قد تظهر في أي مرحلة من مراحل الحل، فأثناء عملية تعديل أحدى جداول طرق الحل الأمثل فإننا نقوم بتخفيض الخلايا التي تحمل إشارة (-) لطريقة المسار المتعرج، فإن خليتين أو أكثر يُمكن أن تنخفض القيمة فيها إلى الصفر، عندها تحدث حالة التفكك لحصولنا على عدد خلايا غير مستخدمة أقل من القاعدة أعلاه، وفي حالة امتلاكنا ثلاثة خلايا تحمل الإشارة (-) وجميعها أصبحت = صفر بعد عملية التعديل، فإننا نضع قيمة صفر في خليتين فقط من هذهِ الخلايا، وهذا يعني أننا قمنا بمعالجة خليتين واعتبارهما خلايا مستخدمة وهمية لنحقق القاعدة (M+N-1)، وبعد ذلك نستمر كالمعتاد.

حالة التفكك هذهِ نجدها في مثال (٣-١) عند الحصول على الحل الأمثل لطريقة أقل الكلف وفوجل التقريبية، ومثال (٣-٢) عند الحصول على الحل الأمثل لطريقة أقل الكلف، وغيرها من الأمثلة.

٣-٦-٤ مشكلة محددات النقل

The Problem of the Determinants of Transport

أفترض أن بعض الخلايا في مشكلة النقل غير مقبولة بسبب قيود تنظيمية أو إدارية أو غيرها بحيث لا تستطيع بعض المصانع خدمة بعض مراكز التوزيع، أفترض مثلاً أن الخلية (B,2) غير مقبولة، بمعنى أن المصنع (B) لا يستطيع خدمة مركز التوزيع (2) لأسباب معينه في هذهِ الحالة فإننا نفترض أن التكلفة المصاحبة لهذهِ الخلية عالية جداً (أعلى من جميع الخلايا الأخرى) ولتكن (M)، وكنتيجة منطقية لإجراءات الحل سوف يتم استثناء هذهِ الخلية بشكل طبيعي بسبب امتلاكها تكلفة نقل عالية جداً.

أما إذا كانت المشكلة تعظيم الأرباح فإننا نفترض إيراد منخفض جداً مصاحب للخلية غير المقبولة (أقل من جميع الخلايا الأخرى) وليكن (M-)، وكنتيجة منطقية لإجراءات الحل سوف يتم استثناء هذه الخلية بشكل طبيعي بسبب امتلاكها ربح قليل جداً.

مثال (٣-٩): تقوم أحدى الشركات بتصنيع منتج معين في ثلاثة مصانع تابعه لها (1، 2، 3) تقع في مناطق مختلفة، لتوزيعها إلى ثلاثة أسواق مختلفة (1، 2، 3)، وقد تم تقدير تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج من المصانع إلى الأسواق المختلفة (بالدولار) كما يأتي:

من المصنع \ إلى السوق	1	2	3
1	1.45	1.60	1.40
2	1.10	2.25	0.60
3	1.20	1.20	1.80

وبعد أن تم أخذ تكاليف النقل بعين الاعتبار فقد قررت الشركة عدم استخدام الممر (2,2) ذو التكلفة العالية، فيما يلي البيانات الخاصة بالطاقة الإنتاجية المتوقعة للمصانع الثلاثة، وكذلك الاحتياجات المتوقعة للأسواق الثلاثة من هذا المنتج:

المصنع	الطاقة الإنتاجية المتوقعة (العرض)
1	400 وحدة
2	600 وحدة
3	300 وحدة
إجمالي الطاقات	1300 وحدة

الأسواق	احتياجات الأسواق (الطلب)
1	600 وحدة
2	400 وحدة
3	500 وحدة
إجمالي الاحتياجات	1500 وحدة

وبسبب ظروف معينة فإن تكلفة إنتاج الوحدة تختلف من مصنع لآخر وهي بالترتيب (29.50، 31.20، 30.35) دولار.

المطلوب: أوجد خطة الإنتاج والتوزيع التي تؤدي إلى تقليل تكاليف النقل والإنتاج مستخدماً طرق إيجاد الحل الأولي المقبول المتاحة لديك.

الحل: من الأولويات التي تهدف المنشأة لتحقيقها هي تقليل تكاليف النقل والإنتاج لهذا نحتاج إلى بيانات تتعلق بتكلفة كل وحدة تنقل من المصانع إلى الأسواق وسنرمز لتكلفة الوحدة بالرمز (C_{ij})، تحسب من المعادلة الآتية:

تكلفة الوحدة (C_{ij}) = تكلفة إنتاج الواحدة في مصنع معين + تكلفة النقل لتلك الوحدة

وعلى هذا الأساس تُحسب تكلفة الوحدة بالنسبة للمصانع المختلفة إلى الأسواق المختلفة كما يأتي:

$C_{11} = 29.50 + 1.45 = 30.95\ \$$
$C_{12} = 29.50 + 1.60 = 31.10\ \$$
$C_{13} = 29.50 + 1.40 = 30.90\ \$$
} المصنع 1

$C_{21} = 31.20 + 1.10 = 32.30\ \$$
$C_{22} = 31.20 + 2.25 = 33.45\ \$$
$C_{23} = 31.20 + 0.60 = 31.80\ \$$
} المصنع 2

$C_{31} = 30.35 + 1.20 = 31.55\ \$$
$C_{32} = 30.35 + 1.20 = 31.55\ \$$
$C_{33} = 30.35 + 1.80 = 32.15\ \$$
} المصنع 3

من بيانات المنشأة أعلاه نُلاحظ أن مجموع الكميات المنتجة (1300-) وحدة لا تساوي مجموع الكميات المطلوبة في الأسواق (1500-) وحدة، ولجعل المسألة متزنة يتم إضافة مصنع (صف) وهمي ((4) Dummy Row) بكلف صفرية، هذا الصف يُمثل مصنع وهمي يُنتج الكمية الناقصة لتلبية احتياجات الأسواق ويحتوي هذا الصف على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها (200 = 1300 – 1500) وحدة، بعد إجراء عملية الموازنة بين كميتي العرض والطلب يُمكن إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة الركن الشمالي الغربي، مع إغفال النظر عن الخلايا الوهمية في الصف (4) عند إجراء التخصيص للخلايا ذات التكلفة الأقل، وعدم استخدام الخلية (2,2) ذات التكلفة العالية كأحد شروط الشركة، ولهذا نغلق هذه الخلية كي يتم إهمالها بشكل طبيعي كما في الجدول التالي.

نُلاحظ في الجدول التالي أن عدد الحلول المقبولة 6 تحقق العلاقة (M+N)-1=(4+3)-1=6 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 400, X_{21} = 200, X_{23} = 400, X_{32} = 300, X_{42} = 100, X_{43} = 100$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 30.95\,(400) + 32.30\,(200) + 31.80\,(400) + 31.55\,(300) + 0\,(100) + 0\,(100) = 41.025\$$$

الأسواق / المصنع	1	2	3	إجمالي الطاقات
1	30.95 400	31.10	30.90	~~400~~ 0
2	32.30 200	33.45	31.80 400	~~600~~ ~~400~~ 0
3	31.55	31.55 300	32.15	~~300~~ 0
4	0	0 100	0 100	~~200~~ ~~100~~ 0
إجمالي الاحتياجات	~~600~~ ~~200~~ 0	~~400~~ ~~100~~ 0	~~500~~ ~~100~~ 0	1500 / 1500

الجدول التالي يوضح الحل الأولي المقبول بطريقة أقل الكلف بشرط عدم استخدام الخلية (2,2) ذات التكلفة العالية كأحد شروط الشركة، ولهذا نضع في هذهِ الخلية تكلفة عالية جداً (أعلى من جميع الخلايا الأخرى) ولتكن (M - 100)، وتصبح قيمة تكلفة النقل لهذهِ الخلية ($C_{22} = 33.45 + 100 = 133.45$)، وكنتيجة منطقية لإجراءات الحل سوف يتم استثناء هذهِ الخلية بشكل طبيعي بسبب امتلاكها تكلفة نقل عالية جداً.

الأسواق / المصنع	1	2	3	إجمالي الطاقات
1	30.95	31.10	30.90 400	~~400~~ 0
2	32.30 500	33.45	31.80 100	~~600~~ ~~500~~ 0
3	31.55	31.55 300	32.15	~~300~~ 0
4	0 100	0 100	0	~~200~~ ~~100~~ 0
إجمالي الاحتياجات	~~600~~ ~~100~~ 0	~~400~~ ~~100~~ 0	~~500~~ ~~100~~ 0	1500 / 1500

نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 6 تحقق العلاقة $(M + N)-1 = (4 + 3)-1 = 6$

وهي وفق القيم:

$X_{13} = 400,\ X_{21} = 500,\ X_{23} = 100,\ X_{32} = 300,\ X_{41} = 100,\ X_{42} = 100$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 30.90(400) + 32.30(500) + 31.80(100) + 31.55(300) + 0(100) + 0(100) = 41.155\ \$$$

بهذا نكون قد حصلنا على قيمتين متقاربتين لدالة الهدف كل منها تُعطي تخصيص مختلف لمتغيرات القرار وكيفية توزيع الطلب على العرض بشكل مختلف، أي أن الشركة تملك حلول بديلة تُعطي لها المرونة في عملية اتخاذ القرار النهائي لمشكلة النقل أعلاه.

أما الجدول التالي فيوضح الحل الأولي المقبول لطريقة فوجل التقريبية تحت نفس الافتراضات التي اعتمدت في طريقة أقل الكلف أعلاه.

الأسواق / المصنع	1	2	3	إجمالي الطاقات
1	30.95	31.10	30.90 400	~~400~~ 0
2	32.30 500	33.45	31.80 100	~~600~~ ~~500~~ 0
3	31.55	31.55 300	32.15	~~300~~ 0
4	0 100	0 100	0	~~200~~ ~~100~~ 0
إجمالي الاحتياجات	~~600~~ ~~500~~ 0	~~400~~ ~~100~~ 0	~~500~~ ~~100~~ 0	1500 1500

كلف الجزاء			
0.05	—	—	—
0.50	0.50	0.50	0.50
0	0	—	—
0	0	0	0

كلف الجزاء			
	0.60	0.45	(0.90)
	0.75	(101.90)	0.90
	32.30	(133.45)	31.80
	(32.30)	—	31.80

نلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 6 تحقق العلاقة $(M + N) - 1 = (4 + 3) - 1 = 6$

وهي وفق القيم:

$X_{13} = 400, X_{21} = 500, X_{23} = 100, X_{32} = 300, X_{41} = 100, X_{42} = 100$

أما الكلفة الكلية فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 30.90(400) + 32.30(500) + 31.80(100) + 31.55(300) + 0(100) + 0(100) = 41.155\$$$

وهذه القيمة مساوية لما تم الحصول عليه من طريقة أقل الكلف السابقة.

٣-٦-٥ وجود أكثر من حل أمثل There Is More Than An Optimal Solution

كما هو الحال في مشاكل البرمجة الخطية فإن من الممكن (بل في الحقيقة ومن الشائع جداً) أن يكون لمشاكل النقل حلول متعددة، ومن الناحية العملية فإن الحلول المتعددة تمد الإدارة بمرونة أكبر من اختيار واستخدام الموارد، بالاعتماد على ما تقدمهُ هذهِ الحلول من خيارات بديلة في عملية توزيع الكميات المعروضة عند المصانع لتلبية احتياجات مراكز التوزيع من هذهِ الكميات[1].

يُمكن مُلاحظةُ حالة تعدد الحلول في مثال (٣-٥) السابق، حيث أعطت لنا طريقة أقل الكلف أدنى قيمة لدالة الهدف مساوية لما أعطتهُ لنا طريقتي إيجاد الحل الأمثل (المسار المتعرج والتوزيع المُعدل) ومقدارها (12000 $)، بمتغيرات قرار وفق القيم وجدول النقل الآتي:

$X_{11} = 300,\ X_{13} = 200,\ X_{22} = 700,\ X_{31} = 100,\ X_{32} = 200,\ X_{34} = 500$

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	[12] 300	[13]	[4] 200	[6]	500
B	[6]	[4] 700	[10]	[11]	700
C	[10] 100	[9] 200	[12]	[4] 500	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

(١) باري رندر، ورالف ستير، وناجراج بالاكريشان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢٩٣.

بينما قد اعطت لنا طريقة فوجل التقريبية نفس القيمة لدالة الهدف ومقدارها (12000$) ولكن بمتغيرات قرار مختلفة وجدول نقل ذو تخصيص مختلف كما في الجدول التالي، وهذا يدل على وجود عدة حلول مثلى لمشكلة النقل أعلاه، مما يُعطي مرونة لمتخذ القرار باعتماد الإستراتيجية التي تناسب هذه الشركة.

المصفاة / الحقل	1	2	3	4	العرض
A	12	13	4 200	6 300	500
B	6	4 700	10	11	700
C	10 400	9 200	12	4 200	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

٣-٧ مسائل محلولة

سؤال (٣-١)

أوجد الحل الأساسي الأولي المقبول لمشكلة النقل التالية مستخدماً الطرق المتاحة لديك، ثم صغ نموذج برمجة خطية لهذه المشكلة:

Customer / Warehouse	1	2	3	4	Capacity
A	270	230	310	690	100
B	100	450	400	320	80
C	300	540	350	570	80
Demands	60	120	50	40	

الحل: يتم التاكد أولاً أن كمية العرض مساوية إلى كمية الطلب

السعة الكلية للمخازن Total Capacity = 100 +80 + 80 = 260 units

الطلب الكلي للزبائن Total Demands = 60 + 120 + 50 + 40 = 270 units

نلاحظ أن السعة الكلية للمخازن (= 260) ≠ الطلب الكلي للزبائن (= 270)، وهذا يعني أن مشكلة النقل أعلاه غير متزنة (Unbalance Problem)، وهذا يستدعي إضافة مخزن وهمي (Dummy Warehouse) ليكن أسمه (D) يستوعب كمية الفرق الناقصة بين الطلب والعرض ومقدارها:

(270 – 260 = 10 units) وبكلف نقل من المخازن إلى الزبائن مقدارها صفر، ونُعيد ترتيب الجدول أعلاه بالشكل الآتي:

Customer / Warehouse	1	2	3	4	Capacity
A	270	230	310	690	100
B	100	450	400	320	80
C	300	540	350	570	80
$D_{(Dummy)}$	0	0	0	0	10
Demands	60	120	50	40	∑=270

١) طريقة الركن الشمالي الغربي:

Customer / Warehouse	1	2	3	4	Capacity
A	270 **60**	230 **40**	310 /	690 /	~~100~~ ~~40~~ 0
B	100 /	450 **80**	400 /	320 /	~~80~~ 0
C	300 /	540 /	350 **50**	570 **30**	~~80~~ ~~30~~ 0
$D_{(Dummy)}$	0 / ε	0 /	0 /	0 **10**	~~10~~ 0
Demands	~~60~~ 0	~~120~~ ~~80~~ 0	~~50~~ 0	~~40~~ ~~10~~ 0	∑=270

نلاحظ أن عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها هي 6 حلول ولا تحقق العلاقة الآتية:

7 – 1 – (3 + 5) – 1 – (M + N) والحل مفكك أو منحل ولكي يصبح الحل مقبولاً يجب إضافة قيمة وهمية ($\varepsilon \cong 0$) في أحدى الخلايا غير المستخدمة (المغطاة) ذات التكلفة الأقل وهي الخلية (D,1)، بهذا نكون قد حققنا شرط عدد الحلول المقبولة في الحل الأولي والتي هي وفق القيم:

$X_{A1}= 60,\ X_{A2}= 40,\ X_{B2}= 80,\ X_{C3}= 50,\ X_{C4}= 30,\ X_{D1}= 0,\ X_{D4}= 10$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 270(60) + 230(40) + 450(80) + 350(50) + 570(30) + 0(0) + 0(10)

= 96000 $

٢) طريقة أقل الكلف:

Customer / Warehouse	1	2	3	4	Capacity
A	270 ~~/~~	230 **100**	310 ~~/~~	690 ~~/~~	~~100~~ 0
B	100 **50**	450 ~~/~~	400 ~~/~~	320 **30**	~~80~~ ~~30~~ 0
C	300 ~~/~~	540 **20**	350 **50**	570 **10**	~~80~~ ~~30~~ ~~10~~ 0
$D_{(Dummy)}$	0 **10**	0 ~~/~~	0 ~~/~~	0 ~~/~~	~~10~~ 0
Demands	~~60~~ ~~50~~ 0	~~120~~ ~~20~~ 0	~~50~~ 0	~~40~~ ~~10~~ 0	∑=270

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $(M + N) - 1 = (3 + 5) - 1 = 7$ وهي وفق القيم:

$X_{A2}=100, X_{B1}=50, X_{B4}=30, X_{C2}=20, X_{C3}=50, X_{C4}=10, X_{D1}=10$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 230(100) + 100(50) + 320(30) + 540(20) + 350(50) + 570(10) + 0(10) = 71600 $

٣) طريقة فوجل التقريبية (VAM):

Customer / Warehouse	1	2	3	4	Capacity
A	270	230 **100**	310	690	~~100~~ 0
B	100 **60**	450	400	320 **20**	~~80~~ ~~20~~ 0
C	300	540 **20**	350 **50**	570 **10**	~~80~~ ~~20~~ ~~10~~ 0
$D_{(Dummy)}$	0	0	0	0 **10**	~~10~~ 0
Demands	~~60~~ 0	~~120~~ ~~20~~ 0	~~50~~ 0	~~40~~ ~~30~~ ~~10~~ 0	∑=270

كلف الجزاء				
	100	230	310	(320)
	170	(220)	40	—
	200	90	50	—
	—	90	50	—
	—	90	—	—

كلف الجزاء				
40	40	—	—	—
220	220	(220)	80	(130)
50	50	50	(190)	30
0	—	—	—	—

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $(M + N) - 1 = (3 + 5) - 1 = 7$ وهي وفق القيم:

$X_{A2} = 100, X_{B1} = 60, X_{B4} = 20, X_{C2} = 20, X_{C3} = 50, X_{C4} = 10, X_{D4} = 10$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 230(100) + 100(60) + 320(20) + 540(20) + 350(50) + 570(10) + 0(10) = 69400\ \$$$

كما هو متوقع فإن هذا الحل أفضل من الحل الناتج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ذات التكلفة المساوية إلى $96000، كذلك أفضل من الحل باستخدام طريقة أقل الكلف ذات التكلفة المساوية إلى $71600.

٤) صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة:

$$\text{Min. } Z = 270 X_{A1} + 230 X_{A2} + 310 X_{A3} + 690 X_{A4} + 100 X_{B1} + 450 X_{B2} + 400 X_{B3} + 320 X_{B4} + 300 X_{C1} + 540 X_{C2} + 350 X_{C3} + 570 X_{C4} + 0 X_{D1} + 0 X_{D2} + 0 X_{D3} + 0 X_{D4}$$

Sub. to

$$X_{A1}+X_{A2}+X_{A3}+X_{A4} \leq 100 \quad \text{(مخزن A)}$$

$$X_{B1}+X_{B2}+X_{B3}+X_{B4} \leq 80 \quad \text{(مخزن B)}$$

$$X_{C1}+X_{C2}+X_{C3}+X_{C4} \leq 80 \quad \text{(مخزن C)}$$

$$X_{D1}+X_{D2}+X_{D3}+X_{D4} \leq 10 \quad \text{(مخزن D)}$$

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1} = 60 \quad \text{(زبون 1)}$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2} = 120 \text{ (زبون 2)}$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} = 50 \text{ (زبون 3)}$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} + X_{D4} = 40 \text{ (زبون 4)}$$

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{A4}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{B4}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3}, X_{C4}, X_{D1}, X_{D2}, X_{D3}, X_{D4} \geq 0$$

Or $(X_{ij} \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4, \ j = 1, 2, 3, 4)$

سؤال (٣-٢)

تملك شركة للمناجم ستة مناجم لإنتاج الفحم ($G_1, G_2, \ldots, G_6$) في بلدان مختلفة، أقصى ما تستخرجه هذه المناجم من خام الفحم في الشهر هو كالآتي:

المنجم	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
الكمية (الف طن)	20	35	30	30	55	40

أما الكميات المطلوبة من طرف زبائنها الأربع في الشهر فهي:

الزبائن	F_1	F_2	F_3	F_4
الكمية (الف طن)	100	50	40	20

تكلفة النقل لكل طن بين المناجم والزبائن (باستعمال وسائل نقل مختلفة) معطاة بالوحدات النقدية في الجدول الآتي:

المناجم / الزبائن	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
F_1	4	7	12	9	15	8
F_2	9	14	5	6	12	10
F_3	15	5	12	10	8	9
F_4	12	9	15	7	6	16

المطلوب: تحديد شبكة النقل التي تسمح لهذهِ الشركة بأن تنقل الفحم بأقل تكلفة كلية ممكنة بين المناجم وزبائنها باستخدام طرق الحل الأساسي الأولي المقبول المتاحة لديك.

الحـل:

١) طريقة الركن الشمالي الغربي:

الزبائن / المناجم	F_1	F_2	F_3	F_4	كمية العرض (ألف طن)
G_1	4 **20**	9	15	12	~~20~~ 0
G_2	7 **35**	14	5	9	~~35~~ 0
G_3	12 **30**	5	12	15	~~30~~ 0
G_4	9 **15**	6 **15**	10	7	~~30~~ ~~15~~ 0
G_5	15	12 **35**	8 **20**	6	~~55~~ ~~20~~ 0
G_6	8	10	9 **20**	16 **20**	~~40~~ ~~20~~ 0
كمية الطلب (ألف طن)	~~100~~ ~~80~~ ~~45~~ ~~15~~ 0	~~50~~ ~~35~~ 0	~~40~~ ~~20~~ 0	~~20~~ 0	$\Sigma = 210$

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $(M + N) - 1 = (6 + 4) - 1 = 9$ وهي وفق القيم:

X_{11}=20, X_{21}=35, X_{31}=30, X_{41}=15, X_{42}=15, X_{52}=35, X_{53}=20, X_{63}=20, X_{64}=20

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 4(20) + 7(35) + 12(30) + 9(15) + 6(15) + 12(35) + 8(20) + 9(20) + 16(20) = 1990 \$$$

٢) طريقة أقل الكلف:

الزبائن / المناجم	F_1	F_2	F_3	F_4	كمية العرض (ألف طن)
G_1	4 20	9 /	15 /	12 /	~~20~~ 0
G_2	7 /	14 /	5 35	9 /	~~35~~ 0
G_3	12 /	5 30	12 /	15 /	~~30~~ 0
G_4	9 10	6 20	10 /	7 /	~~30~~ ~~10~~ 0
G_5	15 30	12 /	8 5	6 20	~~55~~ ~~35~~ ~~30~~ 0
G_6	8 40	10 /	9 /	16 /	~~40~~ 0
كمية الطلب (ألف طن)	~~100~~ ~~80~~ ~~40~~ ~~30~~ 0	~~50~~ ~~20~~ 0	~~40~~ ~~5~~ 0	~~20~~ 0	$\Sigma = 210$

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $(M + N) - 1 = (6 + 4) - 1 = 9$ وهي وفق القيم:

$X_{11}=20, X_{23}=35, X_{32}=30, X_{41}=10, X_{42}=20, X_{51}=30, X_{53}=5, X_{54}=20, X_{61}=40$

أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 4 (20) + 5 (35) + 5 (30) + 9 (10) + 6 (20) + 15 (30) + 8 (5) + 6 (20) + 8 (40) = 1545 $

٣) طريقة فوجل التقريبية (VAM):

الزبائن / المناجم	F_1	F_2	F_3	F_4	كمية العرض (ألف طن)
G_1	4 [20]	9 /	15 /	12 /	~~20~~ 0
G_2	7 /	14 /	5 [35]	9 /	~~35~~ 0
G_3	12 /	5 [30]	12 /	15 /	~~30~~ 0
G_4	9 /	6 [20]	10 /	7 [10]	~~30~~ ~~10~~ 0
G_5	15 [40]	12 /	8 [5]	6 [10]	~~55~~ ~~45~~ ~~40~~ 0
G_6	8 [40]	10 /	9 /	16 /	~~40~~ 0
كمية الطلب (ألف طن)	~~100~~ ~~80~~ ~~40~~ 0	~~50~~ ~~20~~ 0	~~40~~ ~~5~~ 0	~~20~~ ~~10~~ 0	$\Sigma = 210$

كلف الجزاء
5 5 — — — — — —
2 2 2 2 — — — —
(7) — — — — — — —
1 1 1 2 (2) — — —
2 2 2 2 2 2 (7)
1 1 1 1 1 1 1

كلف الجزاء				
	3	1	3	1
	(3)	3	3	1
	1	(4)	3	1
	1	—	(3)	1
	1	—	1	1
	7	—	1	(10)
	7	—	1	—

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها $9 = 1 - (6+4) = 1 - (M+N)$ وهي وفق القيم:

X_{11}-20, X_{23}-35, X_{32}-30, X_{42}-20, X_{44}-10, X_{51}-40, X_{53}-5, X_{54}-10, X_{61}-40

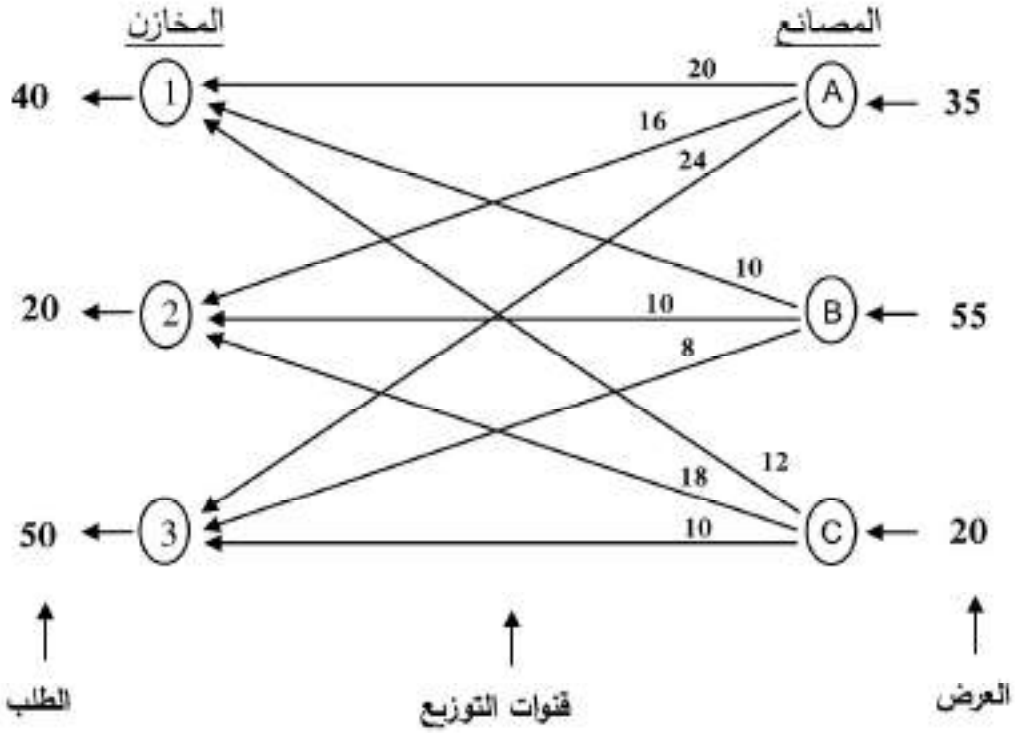
أما الكلفة الكلية للشركة فيتم حسابها بالشكل:

$$\text{Min. } Z = 4(20) + 5(35) + 5(30) + 6(20) + 7(10) + 15(40) + 8(5) + 6(10) + 8(40) = 1615 \$$$

كما هو متوقع فإن هذا الحل أفضل من الحل الناتج باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ذات التكلفة المساوية إلى (1990$)، ولكنها أعطتنا نتائج أسوء مما اعطته طريقة أقل الكلف ذات التكلفة المساوية إلى (1545$) وهذا لا يحدث دائماً.

سؤال (٣-٣)

يتم إنتاج أحد المنتجات في ثلاثة مصانع مختلفة (A، B، C)، ويتم نقلهُ بعد ذلك إلى ثلاثة مخازن مختلفة أيضاً (1، 2، 3)، شبكة النقل الآتية تلخص تكلفة النقل لكل مسار وكميات العرض والطلب لهذهِ المصانع:



المطلوب:

١. كون جدول النقل لهذهِ المشكلة مستعيناً بشبكة النقل المعطاة.

٢. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

٣. استخدم الطرق الثلاث المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٤. قارن بين نتائج الحل في الطرق الثلاث للفرع (٣).

٥. أفترض أن الأرقام في الشبكة أعلاه تُمثل أرباحاً بدلاً من تكاليف، كيف سيؤثر ذلك على تشكيل النموذج في الفرع (٢).

الحل:

١. جدول النقل الخاص بهذهِ المشكلة:

المخازن / المصانع	1	2	3	العرض
A	20	16	24	350
B	10	10	8	550
C	12	18	10	200
الطلب	400	200	500	1100 / 1100

٢. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذهِ المشكلة:

$$\text{Min. } Z = 20X_{11} + 16X_{12} + 24X_{13} + 10X_{21} + 10X_{22} + 8X_{23} + 12X_{31} + 18X_{32} + 10X_{33}$$

Sub. to

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 350 \quad \text{(مصنع A)}$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 550 \quad \text{(مصنع B)}$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 200 \quad \text{(مصنع C)}$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 400 \quad \text{(مخزن 1)}$$

X_{12} $+X_{22}$ $+X_{32}$ = 200 (مخزن 2)

X_{13} $+X_{23}$ $+X_{33}$ = 500 (مخزن 3)

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$

Or $(X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$

في حالة حل المسألة اعلاه فإننا سنحصل على قيم متغيرات القرار الآتية:

$X_{11}=150, X_{12}=200, X_{21}=50, X_{23}=500, X_{31}=200$

أما الكلفة الكلية لدالة الهدف فهي: Objective Value (Min.) Z = 13100

٣. نستخدم الطرق الثلاثة المتاحة لدينا لإيجاد الحل الأولي المقبول:

أ) نبدأ باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي المقبول بالشكل الآتي:

المخازن / المصانع	1	2	3	العرض
A	20 350	16 ⁄	24 ⁄	~~350~~ 0
B	10 50	10 200	8 300	~~550~~ ~~500~~ ~~300~~ 0
C	12 ⁄	18 ⁄	10 200	~~200~~ 0
الطلب	~~400~~ ~~50~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	1100 / 1100

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 350,\ X_{21} = 50,\ X_{22} = 200,\ X_{23} = 300,\ X_{33} = 200$

أما الكلفة الكلية للمسألة فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z= 20 (350) + 10 (50) + 10 (200) + 8 (300) + 10 (200) = 13900

ب) أما الحل الأولي المقبول لطريقة أقل الكلف فهو بالشكل الآتي:

المخازن / المصانع	1	2	3	العرض
A	[20] 150	[16] 200	[24] /	~~350~~ ~~150~~ 0
B	[10] 50	[10] /	[8] 500	~~550~~ ~~50~~ 0
C	[12] 200	[18] /	[10] /	~~200~~ 0
الطلب	~~400~~ ~~350~~ ~~150~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ 0	1100 / 1100

عدد الحلول المقبولة 5 = 1 – 3 + 3 = M + N – 1 وهي وفق القيم:

$X_{11} = 150,\ X_{12} = 200,\ X_{21} = 50,\ X_{23} = 500,\ X_{31} = 200$

Min. Z= 20 (150) + 16 (200) + 10 (50) + 8 (500) + 12 (200) = 13100

ت) الحل الأولي المقبول لطريقة فوجل التقريبية بالشكل الآتي:

المخازن / المصانع	1	2	3	العرض
A	20 350	16 /	24 /	~~350~~ 0
B	10 /	10 200	8 350	~~550~~ ~~350~~ 0
C	12 50	18 /	10 150	~~200~~ ~~50~~ 0
الطلب	~~400~~ ~~50~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~150~~ 0	1100 / 1100

كلف الجزاء
4 (4) —
2 2 (2)
2 2 2

كلف الجزاء			
	2	(6)	2
	2	—	2
	2	—	2

عدد الحلول المقبولة $M + N - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ وهي وفق القيم:

$X_{11} = 350, X_{22} = 200, X_{23} = 350, X_{31} = 50, X_{33} = 150$

Min. Z= 20 (350) + 10 (200) + 8 (350) + 12 (50) + 10 (150) = 13900

٤. مقارنة بين نتائج الطرق الثلاثة للفرع (٣):

بعد مقارنة نتائج طريقة البرمجة الخطية مع نتائج طرق الحل الأولي المقبول، نجد أن أفضل نتيجة قد تم التوصل لها هي لطريقة أقل الكلف، والتي أعطت لنا قيم متطابقة مع قيم البرنامج الخطي من حيثُ قيمة دالة الهدف

Objective Value (Min.) Z=13100، ومن حيث قيم متغيرات القرار والتي هي: X_{11}=150, X_{12}=200, X_{21}=50, X_{23}=500, X_{31}=200 ، وتختلف عن ذلك طريقتي الركن الشمالي الغربي وطريقة فوجل التقريبية وكلاهما قد أعطى القيمة (13900).

٥. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذهِ المشكلة في حالة امتلاكنا أرباحاً بدلاً من التكاليف:

يُمكن الاستفادة من نموذج البرمجة الخطية للفرع (٢)، حيثُ يتم تغيير دالة الهدف فقط إلى حالة (Max.) لأننا قد افترضنا أن جميع قيم التكاليف هي أرباحاً وتبقى القيود الهيكلية على حالها بدون تغيير، حيثُ تصبح دالة الهدف بالشكل الآتي:

$$\text{Max. } Z = 20X_{11} + 16X_{12} + 24X_{13} + 10X_{21} + 10X_{22} + 8X_{23} + 12X_{31} + 18X_{32} + 10X_{33}$$

سؤال (٣-٤)

تنتج إحدى المنشآت الصناعية منتج واحد في ثلاثة مصانع (1، 2، 3) تقع في مناطق مختلفة وتبلغ الطاقة الإنتاجية المتوقعة لهذهِ المصانع خلال الفترة المالية القادمة كانت (800، 600، 1000) طن على التوالي، وتقوم المنشأة بتوزيع إنتاجها من المنتج على ثلاث مناطق بيعيه مختلفة (A، B، C)، تبلغ احتياجاتها المتوقعة خلال الفترة (1200،

500، 700) طن على التوالي، وتقدر تكلفة نقل الطن من المنتج من المصنع إلى المناطق البيعية المختلفة (وحدة نقدية) كما يأتي[1]:

إلى المناطق / من المصنع	A	B	C
1	8	6	9
2	10	12	7
3	4	5	8

المطلوب:

١. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

٢. افترض أنه يجب نقل 800 طن من المصنع (1) إلى منطقة التوزيع (A)، كيف يُمكن تعديل نموذج البرمجة الخطية ليعكس هذا التغيير؟ أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل هذهِ بعد هذا التعديل.

٣. افترض أن الشركة قامت بإلغاء مناطق التوزيع (A) و (B)، كيف يُمكن تعديل نموذج البرمجة الخطية للفرع (1) ليعكس هذا التغيير؟ أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل هذهِ بعد هذا التعديل.

الحل: يتم في البداية تكوين جدول النقل الخاص بهذهِ المشكلة بالشكل الآتي:

---

(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٦٢.

المناطق / المصانع	A	B	C	العرض
1	8	6	9	800
2	10	12	7	600
3	4	5	8	1000
الطلب	1200	500	700	2400 / 2400

١. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذهِ المشكلة:

$$\text{Min. } Z = 8X_{11} + 6X_{12} + 9X_{13} + 10X_{21} + 12X_{22} + 7X_{23} + 4X_{31} + 5X_{32} + 8X_{33}$$

Sub. to

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 800 \quad \text{(مصنع 1)}$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 600 \quad \text{(مصنع 2)}$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 1000 \quad \text{(مصنع 3)}$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1200 \quad \text{(منطقة A)}$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 500 \quad \text{(منطقة B)}$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 700 \quad \text{(منطقة C)}$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$$

Or $(X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$

في حالة حل المسألة أعلاه بطريقة السمبلكس أو بواسطة أحدى البرامج الجاهزة مثل (TORA) فإن الكلفة الكلية لدالة الهدف هي (Objective Value (Min.) (Z=13700، وإن قيم متغيرات القرار هي بالشكل الآتية:

X_{11} = 200: أي يتم نقل 200 طن من المصنع الأول إلى المنطقة الأولى (A).

X_{12} = 500: أي يتم نقل 500 طن من المصنع الأول إلى المنطقة الثانية (B).

X_{13} = 100: أي يتم نقل 100 طن من المصنع الأول إلى المنطقة الثالثة (C).

X_{23} = 600: أي يتم نقل 600 طن من المصنع الثاني إلى المنطقة الثالثة (C).

X_{31} = 1000: أي يتم نقل 1000 طن من المصنع الثالث إلى المنطقة الأولى (A).

٢. تحت افتراض أنه يجب نقل 800 طن من المصنع (1) إلى منطقة التوزيع (A):

يُمكن الاستفادة من الفرع (1) لتعديل نموذج البرمجة الخطية ليعكس هذا التغيير، حيثُ نعمل على تغيير القيد الأول فقط ليصبح بالشكل:

X_{11} = 800 (قيد المصنع 1)

نُعيد حل نموذج البرمجة الخطية للفرع (1) بعد إجراء التعديل أعلاه، باستخدام طريقة السمبلكس أو بواسطة أحدى البرامج الجاهزة مثل (TORA) لنحصل على الحل الأمثل الآتي:

نُلاحظ أن الكلفة الكلية لدالة الهدف قد ازدادت وأصبحت: Obj. Value (Min.) Z = 15500 حسب التعديل المطلوب، وإن قيم متغيرات القرار التي تم الحصول عليها أعلاه هي وفق القيم الآتية:

$X_{11} = 800$ ،$X_{23} = 600$ ،$X_{31} = 400$ ،$X_{32} = 500$ ،$X_{33} = 100$.

٣. تحت افتراض إن الشركة قامت بإلغاء مناطق التوزيع (A) و (B):

يُمكن الاستفادة من الفرع (1) لتعديل نموذج البرمجة الخطية ليعكس هذا التغيير، حيثُ نعمل على إلغاء أي قيد أو متغيرات تتعلق بمناطق التوزيع (A) و (B) ليصبح النموذج بالشكل الآتي:

Min. $Z = 9 X_{13} + 7 X_{23} + 8 X_{33}$

Sub. to

$X_{13} \leq 800$ (مصنع 1)

$X_{23} \leq 600$ (مصنع 2)

$X_{33} \leq 1000$ (مصنع 3)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 700$ (منطقة C)

$X_{13}, X_{23}, X_{33} \geq 0$

يتم حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس أو بواسطة أحدى البرامج الجاهزة مثل (TORA) لنحصل على الحل الأمثل الآتي:

نُلاحظ أن الكلفة الكلية لدالة الهدف هي: Obj. Value (Min.) Z = 5000، وإن قيم متغيرات القرار بالشكل الأتية:

X_{23} = 600: أي يتم نقل 600 طن من المصنع الثاني إلى المنطقة الثالثة (C).

X_{33} = 100: يتم نقل 100 طن من المصنع الثالث إلى المنطقة الثالثة (C).

بهذا يكون قد تم الإيفاء بطلب منطقة التوزيع الثالثة ومقدارها 700 طن، تم أخذ 600 طن من المصنع الثاني و 100 طن من المصنع الثالث.

سؤال (٣-٥)

تنتج أحدى المنشآت العراقية للصناعات الكهربائية منتج ذو مواصفات فنية خاصة في مصنعين متخصصين (X و Y)، وتبلغ الطاقة الإنتاجية المتاحة سنوياً لهذين المصنعين 5000 و 3000 وحدة على التوالي، وتقوم المنشأة بتوزيع إنتاجها من هذا المنتج على أربعة منافذ توزيع تقع في مناطق مختلفة (1، 2، 3، 4) تبلغ احتياجاتها السنوية المتوقعة 2000، 5000، 3000، 2000 وحدة على التوالي، ونتيجة لاختلاف مصادر الطلب على هذا المنتج وكذلك اختلاف تكلفة الإنتاج والنقل فإن ربح الوحدة المتوقع يختلف من منفذ إلى آخر، ويوضح الجدول الآتي ربح الوحدة المنقولة من كل مصنع إلى كل منفذ توزيع:

إلى المنافذ / من المصنع	1	2	3	4
X	20	17	16	16
Y	19	15	14	17

المطلوب:

١. استخدم طريقة فوجل التقريبية لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٢. استخدم طريقة المسار المتعرج في اختبار مثالية الحل المبدئي وإيجاد الحل الأمثل.

الحل: نُلاحظ أن إجمالي الاحتياجات (الطلب) لمنافذ التوزيع (= 12000) وحدة لا تساوي إجمالي الطاقات (العرض) للمصانع (= 8000) وحدة، وهذا يعني أن مشكلة النقل السابقة غير متزنة وهذا يستدعي إضافة مصنع وهمي خصص له مقدار الزيادة في الطلب ومقدارها (4000 = 8000 – 12000) وحدة ونرمز لهذا المصنع بالرمز (W)، وأي كمية تنقل من هذا المصنع سيكون ربحها صفراً، كما في جدول النقل الآتي:

المنافذ / المصانع	1	2	3	4	العرض
X	20	17	16	16	5000
Y	19	15	14	17	3000
W	0	0	0	0	4000
الطلب	2000	5000	3000	2000	1200 / 1200

١. استخدام طريقة فوجل التقريبية لإيجاد الحل الأولي المقبول:

وفقاً لهذه الطريقة يتم حساب الفرق بين أكبر ربح للوحدة والربح الذي يقل عنه مباشرة وذلك عند حساب كلف الجزاء للصفوف والأعمدة، ويتم التخصيص للخلية صاحبة أكبر ربح بالصف أو العمود صاحب أكبر فرق ربح مع إغفال النظر عن خلايا الصف أو العمود الوهمي عند المقارنة بين الخلايا كما في الجدول التالي.

في جدول النقل التالي نُلاحظ أن عدد الحلول المقبولة 6 وفق القيم الآتية:

$X_{11} = 2000,\ X_{12} = 3000,\ X_{22} = 1000,\ X_{24} = 2000,\ X_{32} = 1000,\ X_{33} = 3000$

أما الربح الكلي فيتم حسابه بالشكل:

$$\text{Max. } Z = 20(2000) + 17(3000) + 15(1000) + 17(2000) + 0(1000) + 0(3000) = 140000$$

المنافذ / المصانع	1	2	3	4	العرض
X	20 2000	17 3000	16 /	16 /	5000 3000 0
Y	19 /	15 1000	14 /	17 2000	3000 1000 0
W	0 /	0 1000	0 3000	0 /	4000 3000 0
الطلب	2000 0	5000 2000 1000 0	3000 0	2000 0	1200 / 1200

كلف الجزاء
(3) 1 1
2 (2) 1
0 0 0

كلف الجزاء	1	2	2	1
	—	2	2	1
	—	(2)	2	—

٢. اختبار مثالية الحل الأولي المقبول بطريقة المسار المتعرج لتعظيم الربح:

يتم اختبار مثالية الحل في مشاكل التعظيم بإتباع نفس خطوات مشاكل تخفيض التكاليف ونفس الخطوات التي اعتمدت في طريقة المسار المتعرج كما يلي:

الخطوة الأولى (إيجاد الأرباح الحدية): سيتم حساب الأرباح الحدية بالاعتماد على ما توصلنا إليه من طريقة فوجل التقريبية، ومن جدول الحل الأساسي المقبول لها نجد أن لدينا 6 خلايا غير مستخدمة وهي X_{13} ، X_{14}، X_{21}، X_{23}، X_{31}، X_{34}.

المنافذ / المصانع	1	2	3	4	العرض
X	20 (2000) ⊖	17 (3000) ⊕	16	16	5000
Y	19 X_{21} ⊕	15 (1000) ⊖	14	17 (2000)	3000
W	0	0 (1000)	0 (3000)	0	4000
الطلب	2000	5000	3000	2000	1200 / 1200

نحسب الربح الحدي لجميع الخلايا غير المستخدمة بالشكل الآتي:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Profit الربح الحدي
X_{13}	$+ C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12}$	+16 −0 +0 −17 = −1
X_{14}	$+ C_{14} - C_{24} + C_{22} - C_{12}$	+16 −17 +15 −17 = −3
X_{21}	$+ C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22}$	+19 −20 +17 −15 = (+1)
X_{23}	$+ C_{23} - C_{33} + C_{32} - C_{22}$	+14 −0 +0 −15 = −1
X_{31}	$+ C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{32}$	+0 −20 +17 −0 = −3
X_{34}	$+ C_{34} - C_{32} + C_{22} - C_{24}$	+0 −0 +15 −17 =−2

من هنا نرى أن الحل الأولي المقبول ليس حلاً أمثلاً بسبب امتلاكنا قيمة موجبة هي (+1) عند الخلية X_{21} وعلينا إيجاد حلاً جديداً، وهذا يعني أن استخدام هذهِ الخلية في الحل الجديد سوف يُضيف إلى الأرباح مبلغ (+1) وحدة نقدية عن كل وحدة تخصص إلى هذهِ الخلية، أما استخدام باقي الخلايا فإن من شأنهِ تخفيض الأرباح.

الخطوة الثانية (إيجاد الجدول الجديد): نقوم بتحديد أكبر عدد من الوحدات التي نستطيع نقلها إلى الخلية التي تم اختيارها وتعديل التوزيعات بما يتناسب مع التوزيع الجديد، حيثُ نختار أقل كمية من الكميات الموجودة في الخلايا التي تحمل إشارة (−) على مسار الخلية غير المستخدمة X_{22} وهي 1000 وحدة، ونقوم بزيادة الخلايا التي تحمل إشارة (+) وهي الخلية (1,2) و (2,1) بمقدار 1000

وحدة، وإنقاص الخلايا التي تحمل إشارة (–) وهي الخلية (1,1) و (2,2) بمقدار 1000 وحدة أيضاً، هذا وتظل باقي خلايا الجدول كما هي بدون تغيير وينتج عن هذهِ العملية الجدول الآتي:

المنافذ / المصانع	1	2	3	4	العرض
X	20 [1000]	17 [4000]	16	16	5000
Y	19 [1000]	15	14	17 [2000]	3000
W	0	0 [1000]	0 [3000]	0	4000
الطلب	2000	5000	3000	2000	1200 / 1200

عدد الحلول المقبولة 6 = 1 – 4 + 3 – 1 = M + N وفق القيم:

$X_{11} = 1000,\ X_{12} = 4000,\ X_{21} = 1000,\ X_{24} = 2000,\ X_{32} = 1000,\ X_{33} = 3000$

Min. Z= 20(1000) + 17(4000) + 19(1000) + 17(2000) + 0(1000) + 0(1000)
= 141000

نُلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت بمقدار (1000) وحدة نقدية وهو ما يعادل عدد الوحدات المخصصة للخلية (2,1) ومقدارها 1000 وحدة مضروبة في الربح الحدي لهذهِ

الخلية (+1)، وللتأكد بأن الحل الأخير هو حل أمثل نُعيد الخطوات من جديد ونختبر الخلايا غير المستخدمة:

Unoccupied Cell الخلايا غير المستخدمة	Closed Path المسار المغلق	Opportunity Profit الربح الحدي
X_{13}	$+ C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12}$	$+16 -0 +0 -17 = -1$
X_{14}	$+ C_{14} - C_{24} + C_{21} - C_{11}$	$+16 -17 +19 -20 = -2$
X_{22}	$+ C_{22} - C_{21} + C_{11} - C_{12}$	$+15 -19 +20 -17 = -1$
X_{23}	$+ C_{23} - C_{33} + C_{32} - C_{12} + C_{11} - C_{21}$	$+14 -0 +0 -17 +20 -19 = -2$
X_{31}	$+ C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{32}$	$+0 -20 +17 -0 = -3$
X_{34}	$+ C_{34} - C_{32} + C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{24}$	$+0 -0 +17 -20 +19 -17 = -1$

بما أن جميع قيم الربح الحدي أعلاه سالبة فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف الأخيرة (141000) هي القيمة المثلى.

تمارين الفصل الرابع

تمرين (٣-١)

يفكر أحد المستثمرين في إقامة مشروع لإنتاج الألبان تتوزع وحداته الإنتاجية في مناطق بغداد والبصرة وأربيل، ثم تنقل المنتجات الى أربع مراكز تسويق هي (1، 2، 3، 4)، وقد وضع خطة أولية تعتمد على أن الطاقة الإنتاجية لوحدة إنتاج بغداد هي 2000 وحدة و1300 وحدة للبصرة و1700 وحدة لأربيل، وقد أفترض أن جميع كميات الإنتاج سيتم توزيعها على المراكز الأربعة المطلوبة بمقدار (1000، 2000، 500، 1500) وحدة على التوالي، وقد لاحظ أن تكلفة النقل (وحدة نقدية) من مراكز الإنتاج لمراكز التوزيع كانت كالأتي:

إلى مراكز التسويق / من مناطق الإنتاج	1	2	3	4
بغداد	10	8	6	4
البصرة	14	17	5	2
أربيل	18	7	11	9

المطلوب: ساعد هذا المستثمر للوصول لأقل تكلفة نقل:

١. باستخدام طرق النقل المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٢. أوجد الحل الأمثل بطريقتي المسار المتعرج والتوزيع المعدل للحل الأولي المقبول لطريقة الركن الشمالي الغربي في الفرع (١).

٣. أرسم شبكة النقل التي تُمثل الحل الأمثل للفرع (2).

٤. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

تمرين (٣-٢)

لدى مصنع للطابوق الأحمر ثلاث مستودعات في أماكن مختلفة في بغداد (1، 2، 3)، يعمل المصنع بطاقة أسبوعية مقدارها 170 طناً، ليتم عرضها في هذهِ المستودعات الثلاثة وفق الكميات (35، 65، 70) طن، ويتلقى طلبات من ثلاثة مواقع مختلفة في بغداد (حي الكاظمية 75 طن، حي بغداد الجديدة 45 طن، حي الأعظمية 50 طن)، وحيث أن تكاليف النقل تختلف حسب موقع المستودع ومكان الطلب (كما هي موضحة في الجدول أدناه) فإن مدير المستودع يرغب في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن.

إلى مراكز الطلب / من المستودعات	الكاظمية	بغداد الجديدة	الأعظمية
1	5	8	1
2	9	0	4
3	17	8	6

المطلوب:

١. أرسم شبكة تُمثل هذهِ المشكلة.

٢. استخدم طرق النقل المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٣. أوجد الحل الأمثل بطريقتي المسار المتعرج والتوزيع المعدل للحل الأولي المقبول لطريقة أقل الكلف في الفرع (١).

٤. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

تمرين (٣-٣)

تنتج أحدى المنشآت الصناعية منتج واحد في ثلاثة مصانع (1، 2، 3) تقع في مناطق مختلفة، وتبلغ الطاقة الإنتاجية المتاحة سنوياً لهذهِ المصانع (350، 900، 250) طن على التوالي، وتقوم المنشأة بتوزيع إنتاجها من هذا المنتج على ثلاثة منافذ توزيع (A، B، C) تبلغ احتياجاتها السنوية (300، 700، 400) طن على التوالي، وتبلغ تكلفة نقل الطن من كل مصنع إلى كل منفذ توزيع (بالدولار) كما يلي:

إلى منافذ التوزيع / من المصانع	A	B	C
1	7	3	10
2	4	6	2
3	5	8	9

المطلوب:

١. استخدم طريقة أقل الكلف لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٢. اختبار مثالية الحل بطريقة المسار المتعرج.

ملاحظة: أن العرض الكلي (=1500) ≠ الطلب الكلي (=1400)، لجعل المسألة متزنة يتم إضافة منفذ توزيع (عمود) وهمي ((D) Dummy Column) بتكاليف صفرية، ويحتوي هذا العمود على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها - 1400 - 1500) (100 وحدة.

تمرين (٣-٤)

تقوم أحدى الشركات بتزويد أربعة عملاء بالمنتجات التي تقوم بتصنيعها، وبعد استلام طلبات العملاء الأربعة، تبين لها أن الطلبات تزيد عن طاقة المصنعين التابعين لها، وقد واجهت الشركة مشكلة تحديد عدد الوحدات التي يجب أن تزود بها كل عميل، وبسبب اختلاف العملاء فقد كانت الشركة تضع أسعار مختلفة لكل عميل، كما أن تكاليف الإنتاج في كل مصنع تختلف عن الآخر، بالإضافة إلى أن تكاليف نقل المنتجات من كل مصنع إلى كل عميل كانت تختلف أيضاً، وبعد أن قامت الشركة باحتساب السعر وتكلفة الإنتاج وتكلفة النقل، فقد توصلت إلى تقدير الربح لكل وحدة يتم نقلها من كل مصنع إلى كل عميل على النحو الآتي:

إلى العملاء / من المصنع	A	B	C	D
1	24	26	24	32
2	26	22	20	30

وكانت الطاقة الإنتاجية للمصنعين وطلبات العملاء على النحو الآتي:

المصنع	الطاقة الإنتاجية (العرض)
1	3750
2	1750
المجموع	5500

العميل	عدد الوحدات المطلوبة (الطلب)
A	750
B	3750
C	1750
D	750
المجموع	7000

المطلوب:

١. كم عدد الوحدات التي يجب أن ينتجها كل مصنع لكل عميل من أجل تعظيم الإرباح ؟ استخدم طريقة فوجل التقريبية لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٢. اختبار مثالية الحل بطريقة التوزيع المُعدل.

ملاحظة: أن العرض الكلي (=5500) ≠ الطلب الكلي (=7000)، لجعل المسألة متزنة يتم إضافة مصنع (صف) وهمي ((Dummy Raw (3) بتكاليف صفرية، ويحتوي هذا الصف على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها (100 = 7000 – 5500) وحدة.

تمرين (٣-٥)

تنتج أحدى المنشآت الصناعية منتج كهربائي ذو مواصفات خاصة في مصانعها الثلاثة التي تقع في مناطق مختلفة من العراق هي (A، B، C)، وتبلغ الطاقة الإنتاجية المتاحة سنوياً لهذهِ المصانع (230، 180، 160) وحدة على التوالي، وتقوم المنشأة بتوزيع إنتاجها من هذا المنتج على ثلاثة مناطق بيعية مختلفة (1، 2، 3) تبلغ احتياجاتها السنوية (170، 220، 180) وحدة على التوالي، وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المنتج من المصانع إلى المناطق البيعية (بالدولار) كما يلي:

إلى المناطق البيعية / من المصانع	1	2	3
A	60	80	50
B	100	30	100
C	80	120	70

فإذا علمت أن متوسط تكلفة إنتاج الوحدة من المنتج في المصانع الثلاثة يبلغ (200، 280، 300) دولار على التوالي، كما تبلغ أسعار بيع الوحدة من المنتج في المناطق البيعية الثلاثة بالترتيب (450، 420، 400) دولار.

المطلوب:

١. إيجاد الحل الأولي المقبول لمشكلة النقل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لجدول تكاليف النقل أعلاه.

٢. اختبار مثالية الحل الأولي المقبول باستخدام طريقة التوزيع المُعدل.

٣. تكوين جدول الإرباح لبيانات مشكلة النقل أعلاه، ثم إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة أقصى الأرباح لتعظيم الربح (والتي هي طريقة أقل الكلف في حالة التكاليف)، علماً أنه يُمكن حساب الإرباح من المعادلة:

ربح الوحدة الواحدة = سعر البيع – (تكلفة إنتاج الوحدة + تكلفة النقل لتلك الوحدة)

ملاحظة: يُمكن الإستعانة بمثال (٣-٨) لمعرفة أسلوب حساب الإرباح.

تمرين (٣-٦)

تمتلك شركة آشور العامة للمقاولات الإنشائية أسطول من سيارات النقل، لنقل مواد البناء من مصانع الشركة إلى مواقع العمل، وتعمل الشركة حالياً في ثلاثة مواقع احتياجاتها الشهرية من مواد البناء كما يلي:

- الموقع الأول (A) = 32 حمولة / سيارة.
- الموقع الأول (B) = 66 حمولة / سيارة.
- الموقع الأول (C) = 34 حمولة / سيارة.

ولدى الشركة ثلاثة مصانع رئيسية تقع في مناطق متفرقة من العراق، طاقتها الشهرية كما يلي:

- مصنع (1) = 35 حمولة / سيارة.
- مصنع (2) = 57 حمولة / سيارة.
- مصنع (3) = 40 حمولة / سيارة.

فإذا علمت أن تكاليف تشغيل السيارة الواحدة من كل مصنع إلى كل موقع تقدر بالدولار كما يلي:

إلى المواقع / من المصانع	A	B	C
1	5	7	8
2	6	8	6
3	7	4	5

المطلوب:

١. وضع برنامج لتلبية احتياجات المواقع الثلاثة من مواد البناء في حدود الطاقات المتاحة في المصانع، وذلك بأقل تكاليف ممكنة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

٢. إيجاد الحل الأمثل للفرع (1) بطريقة المسار المتعرج.

تمرين (٣-٧)

تقوم شركة السلاسل بصناعة المطابخ الحديثة، وقد حصلت هذهِ الشركة على طلبات من قِبل أربعة عملاء على النحو التالي، وتملك هذهِ الشركة ثلاثة مصانع موزعة في مناطق مختلفة تستطيع إنتاج هذهِ المطابخ، والجدول التالي يلخص الطاقة الإنتاجية لكل مصنع.

المصنع	الطاقة الإنتاجية (العرض)
A	65
B	100
C	95
المجموع	260

العميل	عدد الوحدات المطلوبة (الطلب)
1	55
2	75
3	70
4	90
المجموع	290

وقد قامت الشركة بدراسة تكاليف الإنتاج والنقل وتوصلت إلى الربح المصاحب لنقل كل وحدة من كل مصنع إلى كل عميل على النحو الآتي:

إلى العملاء / من المصانع	1	2	3	4
A	8	21	18	16
B	11	17	17	10
C	18	12	20	13

ترغب الشركة معرفة عدد المطابخ التي يجب إنتاجها في كل مصنع، وكم عدد المطابخ التي يجب نقلها من كل مصنع إلى كل عميل بشكل يؤدي إلى تعظيم الإرباح.

المطلوب:

١. أرسم شبكة نقل تُمثل هذهِ المشكلة.

٢. استخدم طرق النقل المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٣. أوجد الحل الأمثل بطريقة المسار المتعرج.

٤. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

ملاحظة: أن العرض الكلي (=260) ≠ الطلب الكلي (=290)، لجعل المسألة متزنة يتم إضافة مصنع (صف) وهمي ((D) Dummy Raw) بتكاليف صفرية، ويحتوي هذا الصف على كمية الفرق بين العرض والطلب ومقدارها (30 = 260 – 290) وحدة.

تمرين (٣-٨)

يوجد في إحدى البلدان مصدران لإنتاج الطاقة (A و B) بطاقة إنتاجية (135 و 115) ميجاواط، ولديها أربعة مدن (1، 2، 3، 4) تحتاج يومياً إلى (80، 60، 75، 35) ميجاواط على الترتيب، وتبعد هذهِ المدن عن المصدر الأول بمسافة (120، 210، 95، 140) كم، وعن المصدر الثاني بمسافة (125، 175، 290، 70) كم على الترتيب، إذا علمت أن تكلفة نقل الميجاواط هي 2$ / كم.

المطلوب:

١. أرسم شبكة نقل تُمثل هذهِ المشكلة.

٢. إيجاد الحل الأولي المقبول بطريقة أقل الكلف وحساب إجمالي تكلفة النقل بين المصدرين والمدن الأربعة في ظل هذا الحل.

٣. أوجد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المُعدل.

تمرين (٣-٩)

يوجد في مدينة بغداد ثلاث خزانات مياه رئيسية للشرب (1، 2، 3) بكميات توريد يومية مقدارها (35، 50، 75) مليون لتر على الترتيب، ينبغي عليها يومياً تزويد المدن الأربع (A، B، C، D) باحتياجاتها البالغة (15، 32، 25، 18) مليون لتر على الترتيب، فإذا علمت أن تكلفة ضخ اللتر من المياه من هذهِ الخزانات إلى المدن (بالدولار) كما يلي:

إلى المدن / من الخزانات	A	B	C	D
1	4	3	7	6
2	5	5	3	5
3	3	9	10	2

المطلوب: استخدم نموذج النقل للوصول إلى جدولة الضخ الأرخص مستخدماً طريقة فوجل التقريبية لإيجاد الحل الأولي المقبول، ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج، علماً أن كميات المياه الزائدة تخزن بدون أي تكلفة إضافية.

تمرين (٣-١٠)

تقوم إحدى المنشآت الصناعية بإنتاج منتج واحد وتسويقه إلى ثلاث وكلاء بيع (A، B، C)، وتمتلك المنشأة ثلاث مخازن (1، 2، 3) موزعة على ثلاثة مناطق جغرافية مختلفة، حيثُ يتم توزيع المنتج من المخازن المذكورة مباشرة إلى الوكلاء، فإذا علمت

أن الكميات المتاحة سنوياً من المنتج بالمخازن الثلاثة هي (125، 175، 250) وحدة على التوالي، وتبلغ الكميات المطلوبة من قبل الوكلاء الثلاثة (160، 210، 80) وحدة على التوالي، وتبلغ تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل وكيل بيع (بالدولار) كما يأتي:

إلى الوكلاء / من المخازن	A	B	C
1	2.50	3.25	4.15
2	4.00	2.85	3.95
3	1.75	2.00	2.85

المطلوب:

١. استخدم طرق النقل المتاحة لديك لإيجاد الحل الأولي المقبول.

٢. أوجد الحل الأمثل بطريقة المسار المتعرج.

٣. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

٤. أرسم شبكة نقل تُمثل الحل الأمثل للفرع (٢).

٥. في حالة إفتراض أن طلب الوكيل (C) من هذا المنتج أصبح 180 وحدة، فما هو الحل الأولي المقبول لمشكلة النقل هذهِ باستخدام أقل الكلف.

الفصل الرابع

نماذج التخصيص Assignment Models (A.M.)

٤-١ مقدمة Introduction

يعتبر نموذج التخصيص أو التعيين حالة خاصة من حالات أو نماذج البرمجة الخطية مثلها في ذلك مثل نموذج النقل، والتي تتعامل مع نوع خاص من مشاكل البرمجة الخطية، ولهذا فإنهُ يكون من المفضل تصميم نموذجاً خاصاً بها يكفل التوصل إلى الحل الأمثل لها في أقل وقت وبأقل جهد ممكن.

يهدف هذا النموذج إلى التخصيص الأمثل لعدد معين من الموارد أو الإمكانيات غير القابلة للتجزئة (آلات أو عمال مثلاً) لعدد مساو من الغايات (الاستخدامات أو المهام مثلاً) بصورة تُمكن من تحقيق أدنى تكلفة أو تحقيق أقصى ربح أو أقل وقت إنجاز مُمكن ... إلخ، ويتم التعيين على أساس ربط كل مورد بمهمة أو استخدام واحد أو العكس أي ربط كل مهمة بمورد واحد فقط (One – to – One).

ومعنى أن الأهداف غير قابلة للتجزئة هو أنهُ لا يُمكن تجزئة الهدف بين العديد من المهام، حيثُ لا يُمكن تعيين أحد رجال البيع لأكثر من منطقة بيع واحدة أو تعيين أكثر من رجل بيع على منطقة بيع واحدة، ذلك لأن الإدارة قد تواجه قرار التخلي عن منتج معين وإحلال منتج أخر محله، وإن هذا القرار يتطلب أن يؤخذ بنظر الاعتبار تكاليف الفرصة الضائعة (Opportunity cost) لتخصيص الإعمال على الآلات أو تخصيص الموظفين على الأعمال المختلفة أو تخصيص البائعين على مناطق البيع.

يُستخدم نموذج التخصيص في كثير من التطبيقات العملية، مثل تخصيص العمال لإنجاز المهام المختلفة بالمنشأة بما يؤدي إلى تحقيق أقل تكلفة أو وقت ممكن، ومشكلة إسناد عقود مقاولات محددة لمقاولين معينين بما يؤدي إلى تحقيق أقل تكلفة أو أقل وقت، ومشكلة جدولة الإنتاج بالمنشأة بمعنى تخصيص كل أمر تشغيل محدد إلى آلة معينة لإنجازه بما يحقق أدنى تكلفة كلية للمنشأة أو إنجاز العمل في أقل وقت ممكن، ومشكلة تخصيص مجموعة أساتذة لمجموعة مساوية من المواد الدراسية بهدف الإيفاء بمتطلبات تلك المواد والحصول على أعلى نسبة نجاح لطلبة تلك المواد من خلال تخصيص الأستاذ المناسب في المكان المناسب، ومشكلة توزيع رجال البيع بين المناطق البيعية المختلفة بما يحقق أكبر ربح ممكن للمنشأة[١] [٢] [٣].

٤-٢ الصيغة العامة لنموذج التخصيص

General Formulation of the Assignment Model

يُمكن تمثيل مشاكل التخصيص على إنها مشكلة نقل متزنة تتسم بمجموعة من السمات أهمها ما يأتي[٤] [٥]:

١. تحقيق المساواة بين عدد الموارد (المصادر Sources) وعدد الاستخدامات (الغايات Destinations)، وبخلافه يتم إضافة متغيرات وهمية لحل المشكلة، أي ضرورة أن تأخذ معاملات الخلايا شكل مصفوفة مربعة كما في جدول (٤-١) التالي.

---

(١) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٦٢.

(٣) باري رندر، ورالف ستير، وناجراج بالاكريشان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٠١.

(4) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 228.

(5) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 383.

٢. عدد الموارد المطلوبة للاستخدام في أي صف تساوي واحد صحيح (بفرض أن الصفوف تُمثل الموارد (a_i -1))، وكذلك فإن عدد الاستخدامات المُعينة للموارد في أي عمود تساوي واحد صحيح (بفرض أن عدد الأعمدة تُمثل الاستخدامات b_j (1=)، كذلك الحال مع ناتج الحل الأمثل لهذه المشكلة والذي يكون قيمة صحيحة (Integer) دائماً.

٣. كل شخص (i) يقوم بإنجاز مهمة واحدة فقط (j)، وكل مهمة (j) يتم إنجازها من قبل شخص واحد فقط (i).

٤. مصفوفة التكاليف لمشكلة التخصيص تدعى بـ(Cost Matrix).

٥. الكمية التي تخصص لأي خلية (X_{ij}) إما أن تساوي واحد صحيح (في حالة ما إذا كانت الخلية مشغولة) أو أن تساوي صفراً (في حالة ما إذا كانت الخلية فارغة).

يستخدم النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص متغيرات القرار الآتية:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \longrightarrow & \text{إذا تم تخصيص المورد (i) لإنجاز المهمة (j)} \\ 0 \longrightarrow & \text{إذا لم يتم تخصيص المورد (i) لإنجاز المهمة (j)} \end{cases}$$

حيثُ (i -1, 2,..., n) و (j -1, 2,..., n)، وبالتالي فإن المتغير (X_{ij}) يكون متغير ثنائي (له القيمة صفر أو واحد)، وهذا مهم في بحوث العمليات لتمثيل القرارات، ففي حالة القرار نعم أو لا، فإن ذلك يعني: هل يجب تخصيص المورد (i) لإنجاز المهمة (j) أم لا؟

بافتراض أن Z ترمز إلى التكلفة الكلية فإن النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص يكون على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,...,n)$ هذا القيد يتطلب أن يتم أداء كل مهمة بواسطة مورد واحد فقط.

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,...,n)$ وهذا القيد يحدد أن كل مورد يكون لأداء مهمة واحدة فقط.

$X_{ij} \geq 0$ for all i and j قيم ($X_{ij} \geq 0$) لكل الموارد (i) ولكل المهام (j)

X_{ij} قيمة ثنائية، لكل الموارد (i) ولكل المهام (X_{ij} binary for all i and j)

Jobs / Persons	1	2	... j	... n	Supply
1	C_{11}	C_{12}	... C_{1j}	... C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}	... C_{2j}	... C_{2n}	1
.	.	.	...	...	.
.	.	.	...	...	.
i	C_{i1}	C_{i2}	C_{ij}	C_{in}	.
.	.	.	...	...	.
.	.	.	...	...	.
n	C_{n1}	C_{n2}	C_{nj}	C_{nn}	1
Demand	1	1	...	1	

جدول (٤-٢) يوضح الشكل العام لمشاكل التخصيص

٤-٣ طرق الحل Methods of Solution

تجدر الإشارة إلى إمكانية حل نموذج التخصيص بعدة طرق للوصول إلى الحل الأمثل ومنها:

٤-٣-١ طريقة العد الكامل (السرد) أو التبديل

Enumeration or Exchange Method

تقوم هذه الطريقة على أساس إيجاد كل الحلول الممكنة لربط الموارد بالاستخدامات، وحساب تكلفة كل حل واختيار أقلها تكلفة، ولكن من عيوبها إنها طويلة وشاقة ولا يتم استخدامها كثيراً، كما في المثال التالي الذي يوضح عدد الحلول الممكنة التي نستطيع الحصول عليها لهذهِ المشكلة[١] [٢].

مثال (٤-١): لدى أحدى الشركات ثلاث مراكز بيع مختلفة وثلاث رجال بيع يعملون لديها، وترغب الشركة بتخصيص رجال البيع على المراكز الثلاثة المختلفة بطريقة مثلى، وقد قامت الشركة بتقدير التكاليف المصاحبة لتخصيص كل رجل من رجال البيع على كل مركز بيع بسبب اختلاف الكفاءة والخبرة فيما بينهم كما في الجدول الآتي:

---

(١) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥٢.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٦٦.

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3
A	10	5	8
B	2	6	3
C	5	7	6

الحل:

١. رجل البيع (A) يُمكن تخصيصه لأي مركز من المراكز الثلاثة.

٢. طالما أن رجل البيع (A) قد تم تخصيصه، فإن رجل البيع (B) يُمكن تخصيصه لأي مركز من المراكز الاثنين الباقية.

٣. ورجل البيع (C) يجب تخصيصه للمركز الوحيد المتبقي.

وبالتالي فإن لدينا (6 = 1 × 2 × 3) حلول ممكنة، وبشكل عام إذا كان لدينا (n) من رجال البيع و(n) من مراكز البيع، فإن عدد الحلول المُمكنة لهذهِ المشكلة يكون على النحو الآتي:

No. of feasible solutions = $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

أما قيم هذهِ الحلول فهي على النحو الآتي:

1) A→1 , B→2 , C →3, the minimum cost = 10 + 6 + 6 = 22
2) A→2 , B→1 , C →3, the minimum cost = 5 + 2 + 6 = (13)
3) A→3 , B→2 , C →1, the minimum cost = 8 + 6 + 5 = 19
4) A→1 , B→3 , C →2, the minimum cost = 10 + 3 + 7 = 20
5) A→2 , B→3 , C →1, the minimum cost = 5 + 3 + 5 = (13)
6) A→3 , B→1 , C →2, the minimum cost = 8 + 2 + 7 = 17

نُلاحظ أننا نملك أثنين من الحلول المثلى بأقل تكلفة ممكنة عند الحالة 2 و 5، وهذه السلسلة من العمليات تُمثل مضروب (مفكوك) العدد (n)، والذي يرمز له (n!)، وكلما زادت قيمة (n) فإن قيمة (n!) تزداد بشكل كبير جداً، كما موضح إدناه:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

وبالتالي عندما يرغب المدير في تعيين عشرة رجال بيع على عشرة مراكز بيع فإن طريقة العد الكامل تصبح غير مقبولة بسبب أملاكنا 3628800 حل مُمكن يجب إيجاد أيهما أقلها تكلفة.

٤-٣-٢ الطريقة الهنغارية Hungarian Method

لقد توصل عالم الرياضيات المجري إلى طريقة خاصة تناسب حل مشاكل التخصيص، وسميت بالطريقة الهنغارية (المجرية) (The Hungarian Method)، وتعتمد هذه الطريقة أساساً على استخدام مفهوم تكلفة الفرصة الضائعة لتخفيض مصفوفة التكاليف من خلال سلسلة من العمليات التي تتضمن طرح وإضافة قيم مناسبة في المصفوفة، ويهدف ذلك إلى إيجاد قيم صفرية في مصفوفة التكاليف، ثم يتم تحقيق التخصيص الأمثل من خلال اختيار الخلايا التي تحتوي على قيم (تكاليف) صفرية من تلك المصفوفة[١] [٢].

---

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 222.

(٢) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥٨.

مثـال (٤-٢): أفتـرض لـديك مصـفوفة التكـاليف التاليـة، أوجـد التخصـيص الأمثـل باستخدام الطريقة الهنغارية.

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	1	8	15	22
B	13	18	23	28
C	13	18	23	28
D	19	23	27	31

الحل:

الخطوة الأولى: التأكد من أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني ان المسألة متزنة.

الخطـوة الثانيـة: (إعـداد مصـفوفة تكـاليف الفرصـة الضـائعة) حيثُ تتضـمن هـذه المصفوفة تكاليف الفرصـة الضـائعة الناتجـة عن اتبـاع الطريقة المثلـى فـي تخصـيص رجـال التوزيـع لمراكـز التوزيـع، أي عـدم تخصـيص الرجـل الأمثـل فـي مركـز التوزيـع الأمثل، ولنفرض أننا قررنا تخصيص الرجل A للمركز 4، من الجدول السابق نُلاحظ أن تكلفة هذا التخصيص تبلغ 22$، وحيث أن الرجل A يمكنه العمل في المركز 1 بتكلفة مقدارها 1$، فإنـه من الواضـح أن قرار تعيين الرجـل A فـي المركـز 4 ليس هو القرار الأمثل، لأننا سوف نضحي بفرصة توفير مبلـغ 21$ جاءت من (22- 1=21$)، ويُشار إلـى هذه التضحية بتكلفة الفرصـة الضـائعة، وبعبارة أخرى فإن قرار تخصيص الرجل A للمركز 4 سوف يلغي تخصيص هذا الرجل لأي مركز بيع أخر

وفقاً للقيد المفروض بأنه يُمكن تخصيص رجل بيع واحد للعمل في مركز بيع واحد فقط.

وبالمثل فإن قرار تخصيص الرجل A للعمل في المركز 2 أو 3 يتضمن تكلفة فرصة ضائعة قدرها ($7=1-8) و ($14=1-15) على الترتيب، بينما نلاحظ أن تخصيص الرجل A للعمل في المركز 1 هو أفضل تخصيص لأن تكلفة الفرصة الضائعة صفر ($0=1-1)، ويمكن تسمية هذه التكاليف بتكاليف الفرصة الضائعة بالنسبة للرجل A، وبإتباع نفس الطريقة بالنسبة لرجال البيع B و C فإننا نحصل على تكاليف الفرصة الضائعة لهم.

هنالك أيضاً تكاليف الفرصة الضائعة لكل مركز بيعي، حيثُ يُمكن تخصيص مركز البيع رقم 1 لرجل البيع A أو B أو C أو D، والذي سوف يكلفنا فرصة ضائعة قدرها ($0=1-1) و ($12=1-13) و ($12=1-13) و ($18=1-19) على الترتيب، حيثُ نجد أن أفضل تخصيص للمركز 1 يكون للعامل A ذو تكلفة الفرصة الضائعة الصفرية.

وفي ضوء ما تم إيضاحه أعلاه فإن إعداد مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة يتم على مرحلتين بالشكل الآتي:

١. تخفيض تكاليف الصفوف، حيثُ نقوم بتحديد أقل تكلفة في كل صف ثم نقوم بطرحها من جميع تكاليف ذلك الصف، على سبيل المثال، أقل تكلفة في الصف الأول = 1، نقوم بطرحها من كافة التكاليف في ذلك الصف فنحصل على الصف الجديد الآتي:

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4
A	0	7	14	21

هذا التخفيض لن يؤثر على الحل الأمثل، وذلك لأن التخفيض يكون بنفس المقدار لجميع تكاليف ذلك الصف، ونقوم بتحديد أقل تكلفة في باقي الصفوف وطرح كلا منها من تكاليف ذلك الصف لنحصل على مصفوفة التكاليف الآتية (مُلاحظة يُمكن البدء بالأعمدة قبل الطرح من الصفوف):

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4		الكمية المطروحة من كل صف
A	0	7	14	21	→	-1
B	0	5	10	15	→	-13
C	0	5	10	15	→	-13
D	0	4	8	12	→	-19

٢. تخفيض تكاليف الأعمدة، حيثُ نقوم بتحديد أقل تكلفة في كل عمود في المصفوفة الجديدة ونطرحها من جميع تكاليف ذلك العمود ونحصل على المصفوفة الآتي:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	0	3	6	9
B	0	1	2	3
C	0	1	2	3
D	0	0	0	0
الكمية المطروحة من كل عمود	-0	-4	-8	-12

المصفوفة الجديدة أعلاه تمثل مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة لرجال البيع وتكاليف الفرصة الضائعة لمراكز التوزيع.

الخطوة الثالثة: تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط المستقيمة (الأفقية والعمودية) في المصفوفة الأخيرة، حيثُ نبدأ بالصف أو العمود الذي يتضمن أكبر عدد من الأصفار لنضع عليه خط مستقيم، ثم التالي وهكذا إلى أن يتم تغطية جميع أصفار المصفوفة، ونراعي الآتي:

- إذا كان عدد خطوط التغطية يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل وننتقل إلى الخطوة السادسة وهي إجراء عملية التخصيص.
- أما إذا كان عدد خطوط التغطية أقل من عدد الصفوف أو عدد الأعمدة فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

في المصفوفة أعلاه نُلاحظ أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو خطين وهذا أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة.

No. of lines (=2) ≠ No. of row or column (=4)

الخطوة الرابعة: طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، حيثُ يتم إيجاد أقل تكلفة من بين التكاليف غير المغطاة وإضافتها إلى التكاليف الموجودة عند نقطة تقاطع خطوط التغطية السابقة، وطرحها من جميع القيم غير المغطاة ومن ضمنها القيمة المختار لعملية الطرح، أما باقي القيم التي تم وضع خط مستقيم عليها فتبقى بدون تغيير.

في مثالنا السابق فإن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (B,2) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية الوحيدة عند الخلية (D,1) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4
A	0	2	5	8
B	0	0	1	2
C	0	0	1	2
D	1	0	0	0

نعود للخطوة الثالثة لتغطية جميع القيم الصفرية ونجد أن:

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

الخطوة الخامسة: طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، حيثُ نلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (B,3) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (D,1) و(D,2) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4
A	0	2	4	7
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	2	1	0	0

نعود للخطوة الثالثة لتغطية جميع القيم الصفرية ونُلاحظ أنه لا يُمكن تغطية القيم الصفرية بأقل من أربعة خطوط تغطية، وبهذا نكون قد حققنا القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

الخطوة السادسة: إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية، حيثُ نرغب بتخصيص رجل بيع واحداً لكل مركز بيعي وهذا يتطلب اختيار خلية واحدة فقط في كل صف أو عمود، ونبدأ التخصيص على الصفوف التي تحتوي على قيمة صفرية واحدة فقط ثم الصفوف التي تليها من حيث عدد القيم

الصفرية ... وهكذا إلى أن نصل إلى التخصيص الأمثل مراعين في ذلك أن عملية التخصيص تكون واحد إلى واحد (One-to-One).

نُلاحظ أن رجل البيع A يملك خيار واحد فقط للعمل في المركز 1 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى رجل البيع A ومركز البيع 1، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الأول والعمود الأول ونستمر بالتخصيص:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	2	1	0	0

نُلاحظ أن جميع رجال البيع المتبقون يملكون اثنان من القيم الصفرية، وهذهِ إشارة إلى وجود أكثر من حل بديل (تعدد الحلول المثلى) كما سنلاحظ ذلك لاحقاً، هذا التعدد في القيم الصفرية يولد لنا عدة حالات هي:

- الحالة الاولى يستطيع الرجل B العمل في المركز 2، لهذا يلغى رجل البيع B ومركز البيع 2، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثاني والعمود الثاني ونستمر بالتخصيص:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	(0)	0	1
C	0	0	0	1
D	2	1	0	0

نُلاحظ أن رجل البيع C يملك خيار واحد فقط للعمل في المركز 3 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى رجل البيع C ومركز البيع 3، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثالث والعمود الثالث ونستمر بالتخصيص:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	(0)	0	1
C	0	0	(0)	1
D	2	1	0	0

نُلاحظ أن رجل البيع D يملك خيار واحد فقط للعمل في المركز 4 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى رجل البيع D ومركز البيع 4، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الرابع والعمود الرابع ونتوقف عن التخصيص:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	(0)	0	1
C	0	0	(0)	1
D	2	1	0	(0)

وتكون نتيجة التخصيص للحالة الأولى كما يلي:

The first optimal solution is: A → 1 , B → 2 , C → 3 , D → 4

The minimum cost = 1 + 18 + 23 + 31 = 73$

مُلاحظة (٤-١): نعتمد على قيم التكاليف في المصفوفة الأصلية لهذا المثال عند حساب الكلفة الكلية لدالة الهدف (The Minimum Cost of Z).

- الحالة الثانية يستطيع الرجل B العمل في المركز 3، لهذا يلغى رجل البيع B ومركز البيع 3، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثاني والعمود الثالث ونستمر بالتخصيص:

مراكز البيع / رجال البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	0	(0)	1
C	0	0	0	1
D	2	1	0	0

نُلاحظ أن رجل البيع C يملك خيار واحد فقط للعمل في المركز 2 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى رجل البيع C ومركز البيع 2، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثالث والعمود الثاني ونستمر بالتخصيص:

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	0	(0)	1
C	0	(0)	0	1
D	2	1	0	0

نُلاحظ أن رجل البيع D يملك خيار واحد فقط للعمل في المركز 4 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى رجل البيع D ومركز البيع 4، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الرابع والعمود الرابع ونتوقف عن التخصيص:

رجال البيع \ مراكز البيع	1	2	3	4
A	(0)	2	4	7
B	0	0	(0)	1
C	0	(0)	0	1
D	2	1	0	(0)

وتكون نتيجة التخصيص للحالة الثانية كما يلي:

The second optimal solution is: A → 1, B → 3, C → 2, D → 4

The minimum cost = 1 + 23 + 18 + 31 = 73$

نُلاحظ لهذا المثال وجود عدة حلول مثلى جميعها تعطي نفس القيمة لدالة الهدف وهي (73$) ولكن بعدة تخصيصات، مما يسمح لمتخذ القرار اختيار التخصيص الذي يناسبه.

مثال (٤-٣): تقوم إحدى الشركات بإجراء الدراسات والأبحاث وقد حصلت على ثلاث طلبات من ثلاث عملاء جدد يريدون إنجاز مشاريع أبحاث، وأرادت الشركة أن تقوم بتعيين ثلاث باحثين للأشراف على هذه الأبحاث الثلاثة، ومن خلال المعلومات التي حصلت عليها الشركة فقد قامت بتقدير الوقت الذي سوف يستغرقة كل باحث للأشراف على كل مشروع من مشاريع الأبحاث الثلاثة، والجدول التالي يلخص عدد الأيام التي يستغرقها كل باحث على كل مشروع:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	22	32	24
B	14	40	22
C	10	34	16

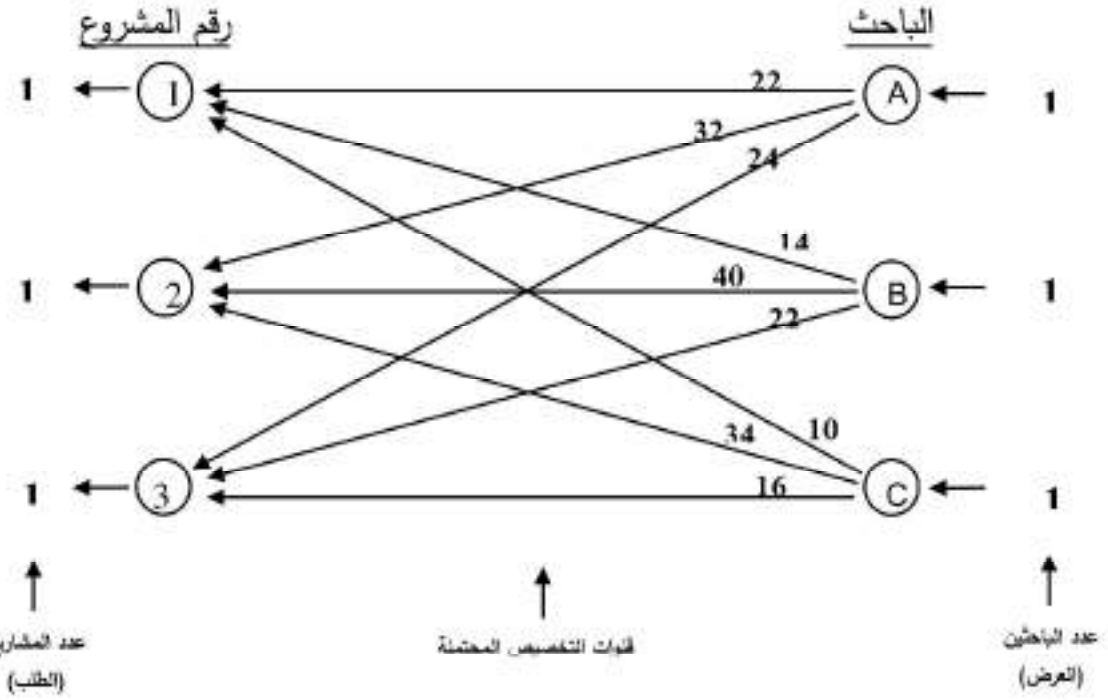
المطلوب:

١. طور شبكة تُمثل هذهِ المشكلة.

٢. استخدم الطريقة الهنغارية للوصول إلى الحل الأمثل.

الحل:

١. تطوير شبكة تُمثل هذهِ المشكلة:



الرسم السابق يبين تمثيل هذهِ المشكلة على شكل شبكة، حيثُ تُمثل الدوائر في هذا الرسم الباحثين (A، B، C) والمشاريع (1، 2، 3)، والأسهم تُمثل التخصيصات (قنوات التخصيص) المحتملة للباحثين للقيام بالمشاريع، والعرض عند كل دائرة يُمثل باحث (=1)، كما أن الطلب عند كل دائرة يُمثل مشروع (=1)، وأن عدد الأيام (أو التكلفة) التي يستغرقها كل باحث على كل مشروع يظهر على الأسهم.

نُلاحظ أن نموذج الشبكة في مشكلة التخصيص هو نفس نموذج الشبكة في مشكلة النقل، وذلك لأن مشكلة التخصيص هي حالة خاصة من مشاكل النقل والتي يكون فيها عدد الوحدات المنقولة من خلال كل قناة (سهم) صفراً أو واحداً.

٢. استخدم الطريقة الهنغارية للوصول إلى الحل الأمثل:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	22	32	24
B	14	40	22
C	10	34	16

الخطوة الأولى: التأكد من أن عدد الصفوف (n=3) = عدد الأعمدة (m=3) وهذا يعني ان المسألة متزنة.

الخطوة الثانية: (إعداد مصفوفة الفرصة الضائعة للأيام)

- تخفيض عدد الأيام في الصفوف، حيثُ نقوم بتحديد أقل عدد أيام في كل صف ثم نقوم بطرحها من جميع أيام ذلك الصف، فنحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	0	10	2
B	0	26	8
C	0	24	6

- تخفيض عدد الأيام في الأعمدة، حيثُ نقوم بتحديد أقل عدد الأيام في كل عمود في المصفوفة الجديدة، ونطرحها من جميع أيام ذلك العمود ونحصل على المصفوفة الآتي:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	0	0	0
B	0	16	6
C	0	14	4

الخطوة الثالثة: تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط المستقيمة (الأفقية والعمودية) في المصفوفة الأخيرة، ونُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو خطين وهذا أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة.

No. of lines (−2) ≠ No. of row or column (−3)

الخطوة الرابعة: طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، حيثُ يتم إيجاد أقل عدد أيام من بين الخلايا غير المغطاة وإضافتها إلى الخلايا الموجودة عند نقطة تقاطع خطوط التغطية السابقة، وطرحها من جميع القيم غير المغطاة ومن ضمنها القيمة المختار لعملية الطرح، أما باقي القيم التي تم وضع خط مستقيم عليها فتبقى بدون تغيير.

نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (C,3) وتساوي 4، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية الوحيدة عند الخلية (A,1) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	4	0	0
B	0	12	2
C	0	10	0

نعود للخطوة الثالثة لتغطية جميع القيم الصفرية ونُلاحظ أنه لا يُمكن تغطية القيم الصفرية بأقل من ثلاثة خطوط تغطية وبهذا نكون قد حققنا القاعدة الآتية:

No. of lines (-3) - No. of row or column (-3)

الخطوة الخامسة: إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية، نُلاحظ أن الباحث B يملك خيار واحد فقط لإجراء المشروع رقم 1 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى الباحث B والمشروع رقم 1، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثاني والعمود الأول ونستمر بالتخصيص.

رقم المشروع / الباحث	1	2	3
A	4	0	0
B	(0)	12	2
C	0	10	0

نُلاحظ أيضاً أن الباحث C يملك الان خيار واحد فقط لإجراء المشروع رقم 3 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى الباحث C والمشروع رقم 3، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثالث والعمود الثالث ونستمر بالتخصيص.

الباحث \ رقم المشروع	1	2	3
A	4	(0)	0
B	(0)	12	2
C	0	10	(0)

نُلاحظ أن الباحث A يملك الان خيار واحد فقط لإجراء المشروع رقم 2 لامتلاكه صفراً واحداً فقط، لهذا يلغى الباحث A والمشروع رقم 2 ونتوقف عن التخصيص.

The optimal solution is: $A \rightarrow 2$, $B \rightarrow 1$, $C \rightarrow 3$

The minimum time = 32 + 14 + 16 = 62 days

مثال (٤-٤): إحدى الشركات لديها أربع وظائف يُمكن إنجازها على أي من الآلات الأربعة التي تمتلكها، الجدول التالي يلخص عدد الساعات المطلوبة لإنجاز كل وظيفة على كل آلة:

الوظيفة \ رقم الآلة	1	2	3	4
A	20	30	28	26
B	24	30	26	24
C	16	24	12	22
D	26	18	32	32

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أقل وقت مُمكن مستخدماً الطريقة الهنغارية للوصول إلى ذلك.

الحل:

الخطوة الأولى: التأكد من أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني ان المسألة متزنة.

الخطوة الثانية: (إعداد مصفوفة الفرصة الضائعة للوقت)

- تخفيض أوقات الصفوف:

الوظيفة \ رقم الآلة	1	2	3	4
A	0	10	8	6
B	0	6	2	0
C	4	12	0	10
D	8	0	14	14

- تخفيض أوقات الأعمدة:

الوظيفة \ رقم الآلة	1	2	3	4
A	0	10	8	6
B	0	6	2	0
C	4	12	0	10
D	8	0	14	14

نُلاحظ أنه لم يحدث أي تغيير على المصفوفة أعلاه وذلك بسبب امتلاكنا قيمة صفرية في كل عمود، وحيث إن القيمة الصفرية هي الأقل فلا يتم طرح أي شيء من كل عمود وتبقى المصفوفة على حالها.

الخطوة الثالثة: تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط المستقيمة، ونُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وبهذا نكون قد حققنا القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

الخطوة الرابعة: إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

الوظيفة \ رقم الآلة	1	2	3	4
A	(0)	10	8	6
B	0	6	2	(0)
C	4	12	(0)	10
D	8	(0)	14	14

The optimal solution is: A → 1 , B → 4 , C → 3, D → 2

The minimum time = 20 + 24 + 12 + 18 = 74 hours

٤-٣-٣ طريقة النقل[1] Transportation Method

- إن مشكلة التخصيص هي حالة خاصة من مشاكل النقل وتفترض أن العرض = الطلب =1.
- يُمكن استخدام إحدى طرق مشاكل النقل لإيجاد الحل الأولي المقبول.

مثال (٤-٥): بالرجوع إلى المثال (٤-٣)، أفترض أننا نرغب بإيجاد الحل الأولي المقبول لمصفوفة عدد الأيام التي يستغرقها كل باحث على كل مشروع باستخدام طرق الحل الأولي في مشاكل النقل، وذلك لإيجاد أقل وقت ممكن لإنجاز هذهِ المشاريع.

الحل:

(1) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, 113.

١. طريقة الركن الشمالي الغربي:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3	العدد المتوفر من الباحثين (العرض)
A	22 1	32	24	0
B	14	40 1	22	0
C	10	34	16 1	0
العدد المطلوب من المشاريع (الطلب)	0	0	0	

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها (3 – N) وهي تعني الآتي:

1 – X_{A1}: أي أن الباحث A يقوم بإنجاز المشروع رقم (1).

1 = X_{B2}: وتعني أن الباحث B يقوم بإنجاز المشروع رقم (2).

1 = X_{C3}: وتعني أيضاً أن الباحث C يقوم بإنجاز المشروع رقم (3).

أما عدد الأيام الكلية التي نحتاجها لإكمال جميع المشاريع فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 22 (1) + 40 (1) + 16 (1) = 78 days

نُلاحظ أن الطريقة الهنغارية قد أعطت أقل عدد أيام ومقدارها (62) يوم من خلال التخصيص الذي قامت به وهو أقل بكثير من الحل المقبول لطريقة الركن الشمالي الغربي.

٢. طريقة أقل الكلف:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3	العرض
A	22 ~~/~~	32 1	24 ~~/~~	~~1~~ 0
B	14 ~~/~~	40 ~~/~~	22 1	~~1~~ 0
C	10 1	34 ~~/~~	16 ~~/~~	~~1~~ 0
الطلب	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها (N = 3) وهي وفق القيم:

$X_{A2} = 1, X_{B3} = 1, X_{C1} = 1.$

أما عدد الأيام الكلية التي نحتاجها لإكمال جميع المشاريع فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 32 (1) + 22 (1) + 10 (1) = 64 days

نلاحظ أن طريقة أقل الكلف قد أعطت قيمة (64) يوم وهي قريبة جداً من القيمة التي أعطتها الطريقة الهنغارية (62) يوم.

٣. طريقة فوجل التقريبية (VAM)

رقم المشروع / الباحث	1	2	3	العرض
A	22	32	24	0
B	14	40	22	0
C	10	34	16	0
الطلب	0	0	0	

كلف الجزاء
2 8
(8) —
6 (18)

كلف الجزاء	4	2	6
	—	2	8

عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها (N = 3) وهي وفق القيم:

$X_{A2} = 1, X_{B1} = 1, X_{C3} = 1.$

أما عدد الأيام الكلية التي نحتاجها لإكمال جميع المشاريع فيتم حسابها بالشكل:

Min. Z = 32 (1) + 14 (1) + 16 (1) = 62 days

نُلاحظ أن طريقة فوجل قد أعطت قيمة (62) يوم وهي متطابقة مع القيمة التي أعطتها الطريقة الهنغارية، وهذا يدل على كفاءة طريقة فوجل والتي تُعطي في أكثر الأحيان قيمة مطابقة أو قريبة من القيمة المثلى.

٤-٣-٤ طريقة البرمجة الخطية[1] Linear Programming Method

طالما أن مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشكلة النقل، فإننا نستطيع تشكيل البرنامج الخطي لهذهِ المشكلة، وبالرجوع إلى الفقرة (٤-٢) الخاصة بالنموذج الرياضي لمشكلة التخصيص وإلى مصفوفة عدد الأيام التي يستغرقها كل باحث لإنجاز كل مشروع في المثال (٤-٣) الآتي:

رقم المشروع / الباحث	1	2	3	العرض
A	22	32	24	1
B	14	40	22	1
C	10	34	16	1
الطلب	1	1	1	

فإننا نستطيع كتابة النموذج الرياضي الخاص بهذهِ المشكلة كما يأتي:

$$\text{Min. } Z = 22X_{A1} + 32X_{A2} + 24X_{A3} + 14X_{B1} + 40X_{B2} + 22X_{B3} + 10X_{C1} + 34X_{C2} + 16X_{C3}$$

Sub. to

$$X_{A1}+X_{A2}+X_{A3} \le 1 \quad \text{(قيد تخصيص الباحث A)}$$

$$X_{B1}+X_{B2}+X_{B3} \le 1 \quad \text{(قيد تخصيص الباحث B)}$$

$$X_{C1}+X_{C2}+X_{C3} \le 1 \quad \text{(قيد تخصيص الباحث C)}$$

$$X_{A1}+X_{B1}+X_{C1} = 1 \quad \text{(قيد تخصيص المشروع الأول)}$$

---

(1) **Ibid**, p. 114.

$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 1$ (قيد تخصيص المشروع الثاني)

$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 1$ (قيد تخصيص المشروع الثالث)

$X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3} \geq 0$

Or $(X_{ij} \geq 0, i = A, B, C, j = 1, 2, 3)$

نُلاحظ أن أول ثلاثة قيود متعلقة بتخصيص الباحثين حيثُ أن كل باحث يُمكن تخصيصه لمشروع واحد على الأكثر لهذا تم كتابة القيود بالإشارة (≤)، أما القيود الثلاثة التالية لها فهي تتعلق بتخصيص المشاريع لكل باحث، حيثُ يجب تخصيص مشروع واحد فقط لكل باحث لهذا تم كتابة القيود بالإشارة (=).

كذلك نُلاحظ أن عدد القيود يساوي عدد النقاط (الدوائر) التي تُمثل الباحثين والمشاريع (6 قيود)، كما أن عدد متغيرات القرار يساوي عدد التخصيصات (الأسهم) في نموذج الشبكة لهذا المثال، حيثُ يُمكن حل مسألة البرمجة الخطية أعلاه باستخدام طريقة السمبلكس المبسطة.

٤-٤ الحالات الخاصة في نماذج التخصيص

Special Cases In Assignment Models

هنالك بعض الحالات الخاصة في نماذج التخصيص وكما يأتي[١] [٢]:

---

(١) فريحات، حيدر محمد، و عواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٦٣.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٧٩.

٤-٤-١ مشكلة التخصيص غير المتوازنة Unbalanced Assignment Problem

أن أحد الشروط الواجب توفرها في مشكلة التخصيص هو أن يكون عدد الصفوف بمصفوفة التخصيص مساوياً لعدد الأعمدة (مصفوفة مربعة)، أي أن عدد الموارد المطلوب تخصيصها مساوياً لعدد المهام المطلوب التخصيص لها، ولكن في كثير من الأحيان لا يتحقق شرط التساوي ومن أجل موازنة المشكلة لتكون متطابقة مع النموذج العام لمشكلة التخصيص، يتم إضافة صف أو عمود وهمي (صوري) إلى الصفوف أو الأعمدة الناقصة على أن تكون جميع عناصر هذا الصف أو العمود الوهمي أصفاراً، وبعدئذ نقوم بالحل وفق الخطوات الاعتيادية للطريقة الهنغارية.

مثال (٤-٦): شركة نقليات تملك شاحنة نقل فائضة في كل من المدن (A، B، C، D)، ولديها شاحنة عجز في كل من المدن (1، 2، 3، 4، 5)، وأن المسافة بالكيلومترات بين هذه المدن موضح بالجدول الآتي:

المحطة \ رقم العربة	1	2	3	4	5
A	12	10	22	15	18
B	10	18	15	25	16
C	11	10	8	3	5
D	6	14	13	10	13

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يجعل المسافة الكلية التي تقطعها الشاحنات بالكيلومترات أقل ما يُمكن من المناطق الفائضة بها إلى المناطق ذات العجز مستخدماً الطريقة الهنغارية.

الحل:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) ≠ عدد الأعمدة (m=5) وهذا يعني ان المسألة غير متزنة، لهذا يتم إضافة محطة (صف) وهمية (E) بعناصر (أو مسافات) صفرية، وبالتالي تصبح المشكلة على النحو الآتي:

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4	5
A	12	10	22	15	18
B	10	18	15	25	16
C	11	10	8	3	5
D	6	14	13	10	13
E	0	0	0	0	0

٢. تخفيض عدد الكيلومترات في الصفوف:

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4	5
A	2	0	12	5	8
B	0	8	5	15	6
C	8	7	5	0	2
D	0	8	7	4	7
E	0	0	0	0	0

٣. تخفيض عدد الكيلومترات في الأعمدة للمصفوفة الأخيرة، وحيثُ أن كل عمود يحتوي على قيمة صفرية فهذا يبقي المصفوفة على حالها بدون تغيير، ونقوم بتغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4	5
A	2	0	12	5	8
B	0	8	5	15	6
C	8	7	5	0	2
D	0	8	7	4	7
E	0	0	0	0	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا لا يحقق القاعدة الأتية:

No. of lines (=4) ≠ No. of row or column (=5)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (C,2) وتساوي 2، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (E,1) و (E,2) و (E,4) ونحصل على المصفوفة الأتية:

المحطة \ رقم العربة	1	2	3	4	5
A	2	0	10	5	6
B	0	8	3	15	4
C	8	7	3	0	0
D	0	8	5	4	5
E	2	2	0	2	0

No. of lines (=4) ≠ No. of row or column (=5)

٥. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (B,3) وتساوي 3، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (C,1) و (C,2) و (E,1) و (E,2) ونحصل على المصفوفة الآتية:

المحطة \ رقم العربة	1	2	3	4	5
A	2	0	7	2	3
B	0	8	0	12	1
C	11	10	3	0	0
D	0	8	2	1	2
E	5	5	0	2	0

No. of lines (=5) = No. of row or column (=5)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٦. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4	5
A	2	(0)	7	2	3
B	0	8	(0)	12	1
C	11	10	3	(0)	0
D	(0)	8	2	1	2
E	5	5	0	2	(0)

The optimal solution is: A → 2, B → 3, C → 4, D → 1, E → 5

The minimum Km = 10 + 15 + 3 + 6 + 0 = 34 Km

في التخصيص الأمثل أعلاه نُلاحظ أنه تم تخصيص العربة (5) للمحطة الوهمية (E)، وهذا يعني من الناحية العملية أنهُ لن يتم تخصيص أحد العربات (وهي الخامسة) لأي محطة.

مثال (٤-٧): في المثال السابق (٤-٦)، لو تم افتراض أن الشركة تملك شاحنة نقل فائضة في كل من المدن (A، B، C، D)، ولديها شاحنة عجز في كل من المدن (1، 2، 3)، وأن المسافة بالكيلومترات بين هذه المدن موضح بالجدول الآتي:

رقم العربة / المحطة	1	2	3
A	12	10	22
B	10	18	15
C	11	10	8
D	6	14	13

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يجعل المسافة الكلية التي تقطعها الشاحنات بالكيلومترات أقل ما يُمكن من المناطق الفائضة بها إلى المناطق ذات العجز مستخدماً الطريقة الهنغارية.

الحل:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) ≠ عدد الأعمدة (m=3) وهذا يعني ان المسألة غير متزنة، لهذا يتم إضافة عربة (عمود) وهمي (4) بعناصر (أو مسافات) صفرية، وبالتالي تصبح المشكلة على النحو الآتي:

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4
A	12	10	22	0
B	10	18	15	0
C	11	10	8	0
D	6	14	13	0

٢. تخفيض عدد الكيلومترات في الصفوف، وحيثُ أن كل صف يحتوي على قيمة صفرية فهذا يبقي المصفوفة على حالها بدون تغيير.

٣. تخفيض عدد الكيلومترات في الأعمدة للمصفوفة الأخيرة.

المحطة \ رقم العربة	1	2	3	4
A	6	0	14	0
B	4	8	7	0
C	5	0	0	0
D	0	4	5	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٤. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

المحطة \ رقم العربة	1	2	3	4
A	6	(0)	14	0
B	4	8	7	(0)
C	5	0	(0)	0
D	(0)	4	5	0

The optimal solution is: A → 2, B → 4, C → 3, D → 1

The minimum Km = 10 + 0 + 8 + 6 = 24 Km

في التخصيص الأمثل أعلاه نُلاحظ أنه تم تخصيص المحطة (B) للعربة الوهمية (4)، وهذا يعني من الناحية العملية أنهُ لن يتم تخصيص أحد المحطات (وهي B) لأي عربة.

٤-٤-٢ مشاكل تعظيم الإرباح Problems Of Maximizing Profits

تم تصميم نموذج التخصيص بهدف تخفيض التكاليف أو الوقت إلى أدنى حد ممكن، ومع ذلك قد يكون هدف متخذ قرار التخصيص هو تعظيم الأرباح، كأن يرغب في تخصيص رجال البيع على المناطق البيعية بهدف تعظيم الأرباح، في هذهِ الحالة يتم تطبيق الطريقة الهنغارية (التي صممت من أجل حل مشاكل التخفيض) لكن مع تعديل طفيف لكي تتناسب مع غرض التعظيم، وتجعل الحل الأمثل لمشكلة التخفيض هو الحل الأمثل لمشكلة التعظيم الأساسية، حيثُ يتم طرح ربح كل خلية من خلايا المصفوفة من أكبر قيمة للربح في تلك المصفوفة، الأمر الذي سيؤدي إلى تحويل المصفوفة إلى مصفوفة التكاليف الضائعة أو مصفوفة الفرصة البديلة، وهي تكلفة عدم اختيار البديل الأفضل من بين البدائل.

والآن نستطيع تطبيق الطريقة الهنغارية على هذهِ المصفوفة للوصول إلى الحل الأمثل، طالما أننا نختار أعلى رقم في المصفوفة ككل لإيجاد تكلفة الفرصة البديلة ونطرح منهُ كافة الأرقام في تلك المصفوفة، فإن أكبر رقم في مصفوفة الربح يقابل أقل رقم في مصفوفة تكلفة الفرصة البديلة.

مثال (٤-٨): شركة مقاولات عامة ترغب ببناء أربع مجمعات سكنية من خلال تخصيصها لأربعة مقاولين، حيثُ يقوم كل مقاول ببناء مجمع واحد فقط، وأن الأرباح

التي سيتم الحصول عليها من جراء تخصيص كل مجمع لمقاول معين تم أستخلاصها من خلال المناقصات التي قدمها كل مقاول مقدرة بآلاف الدولارات كما في الجدول الآتي:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	115	80	80	55
B	150	90	90	70
C	130	110	100	60
D	90	65	75	50

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن لكل مقاول مستخدماً الطريقة الهنغارية.

الحل:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني أن المسألة متزنة.

٢. بما أننا نملك مصفوفة الأرباح، لهذا يتم طرح جميع عناصر هذهِ المصفوفة من أكبر قيمة للربح وهي (150)، للحصول على مصفوفة التكاليف الضائعة الآتية:

المقاول \ رقم المجمع	1	2	3	4
A	35	70	70	95
B	0	60	60	80
C	20	40	50	90
D	60	85	75	100

٣. يُمكن الآن استخدام الطريقة الهنغارية، وذلك بطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ثم أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية (بعد الطرح من الصفوف ثم الأعمدة):

المقاول \ رقم المجمع	1	2	3	4
A	0	15	20	20
B	0	40	45	40
C	0	0	15	30
D	0	5	0	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا لا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) $\neq$ No. of row or column (=4)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في

الخلية (A,2) وتساوي 15، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (C,1) و (D,1) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	0	5	5
B	0	25	30	25
C	15	0	15	30
D	15	5	0	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا لا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

٥. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (A,3) أو (A,4) وتساوي 5، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (D,1) و (D,2) ونحصل على المصفوفة الآتية:

المقاول \ رقم المجمع	1	2	3	4
A	0	0	0	0
B	0	25	25	20
C	15	0	10	25
D	20	10	0	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٦. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

المقاول \ رقم المجمع	1	2	3	4
A	0	0	0	0
B	(0)	25	25	20
C	15	(0)	10	25
D	15	5	0	0

في المصفوفة أعلاه نُلاحظ أن المقاولين B و C قد تم تخصيصهما لإنجاز المجمعين 1 و 2 على التوالي، أما المقاولين A و D فلديهما الحرية بإنجاز المجمع 3 أو 4 (لامتلاكهما القيم الصفرية في كلا العمودين)، وهذا يدل على وجود عدة حلول

مثلى بنفس قيمة الربح الكلي، في هذهِ الحالة، يستطيع متخذ القرار اختيار التخصيص الأمثل الذي يتناسب مع متطلباته.

تتكون الآن لدينا حالتين هما:

- الحالة الأولى: المقاول A ينفذ المجمع رقم 3، والمقاول D ينفذ المجمع رقم 4:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	0	(0)	0
B	(0)	25	25	20
C	15	(0)	10	25
D	15	5	0	(0)

The first optimal solution is: A → 3 , B → 1 , C → 2, D → 4

The Maximum Profit = 80 + 150 + 110 + 50 = 390 $

- الحالة الثانية: المقاول D ينفذ المجمع رقم 3، والمقاول A ينفذ المجمع رقم 4:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	0	0	(0)
B	(0)	25	25	20
C	15	(0)	10	25
D	15	5	(0)	0

The second optimal solution is: A → 4 , B → 1 , C → 2, D → 3

The Maximum Profit = 55 + 150 + 110 + 75 = 390 $

٤-٤-٣ مشكلة التخصيص غير المقبولة Unfeasible Assgnment Problem

أفترض لأسباب تقنية، مساحة المعمل، قوانين البلد أو لأي قيد آخر قرر مدير الشركة عدم تخصيص رجل بيع معين لمنطقة بيعية معينة، لتحقيق هذا الهدف، فإننا نقوم بافتراض قيمة عشوائية كبيرة جداً (= M) للتخصيص غير المقبول (مُقيد Restriction) في حالة التخفيض، وقيمة عشوائية كبيرة جداً (= M-) في حالة التعظيم، وبالتالي عند طرح أو إضافة أي قيمة لـ(M) فإن قيمة (M) ستبقى كبيرة ولن تصل إلى الصفر، وسيتم استثناء الخلية التي تحتوي على (M) من التخصيص في الحل الأمثل تلقائياً.

مثال (٤-٩): بالرجوع إلى المثال (٤-٨)، نفترض لأسباب تقنية لا تستطيع شركة المقاولات العامة تخصيص المقاول A لإنجاز المجمع 3، كذلك لا يستطيع المقاول C

إنجاز المجمع 1، فما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن لكل مقاول مستخدماً الطريقة الهنغارية.

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	115	80	-M	55
B	150	90	90	70
C	-M	110	100	60
D	90	65	75	50

الحل:

بسبب الشروط التقنية التي قد فرضتها الشركة العامة للمقاولات فإنه لا يستطيع المقاول A إنجاز المجمع 3، كذلك لا يستطيع المقاول C إنجاز المجمع 1، لهذا سنضع القيمة الكبيرة جداً (M-) في الخلايا (A,3) و (C,1) ونستعمل الطريقة الهنغارية بنفس الأسلوب السابق:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني أن المسألة متزنة.

٢. بما أننا نملك مصفوفة الأرباح، لهذا يتم طرح جميع عناصر هذه المصفوفة من أكبر قيمة للربح وهي (150)، للحصول على مصفوفة التكاليف الضائعة الآتية (مع إهمال الخلايا (A,3) و(C,1)):

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	35	70	-M	95
B	0	60	60	80
C	-M	40	50	90
D	60	85	75	100

٣. يُمكن الآن استخدام الطريقة الهنغارية، وذلك بطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ثم أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	35	-M	20
B	0	60	50	40
C	-M	0	0	10
D	0	25	5	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا لا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في

الخلية (A,4) وتساوي 20، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (C,1) و (D,1) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	15	-M	0
B	0	40	30	20
C	-M	0	0	10
D	20	25	5	0

نلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا لا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

٥. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (D,3) وتساوي 5، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (C,1) و (C,4) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	10	-M	0
B	0	35	25	20
C	-M	0	0	15
D	20	20	0	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٦. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	0	10	-M	(0)
B	(0)	35	25	20
C	-M	(0)	0	15
D	20	20	(0)	0

The optimal solution is: A → 4 , B → 1 , C → 2, D → 3

The Maximum Profit = 55 + 150 + 110 + 75 = 390 $

مثال (٤-١٠): بالرجوع إلى المثال (٤-٨)، نفترض أن المصفوفة التي لدينا هي مصفوفة تكاليف، فما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أقل كلفة مُمكنة لكل مقاول مستخدماً الطريقة الهنغارية.

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	115	80	+M	55
B	150	90	90	70
C	+M	110	100	60
D	90	65	75	50

الحل:

بسبب الشروط التقنية التي قد فرضتها الشركة العامة للمقاولات فإنه لا يستطيع المقاول A إنجاز المجمع 3، كذلك لا يستطيع المقاول C إنجاز المجمع 1، لهذا سنضع القيمة الكبيرة جداً (M+) في الخلايا (A,3) و (C,1) ونستعمل الطريقة الهنغارية بنفس الأسلوب السابق:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني أن المسألة متزنة.

٢. نستخدم الطريقة الهنغارية، وذلك بطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ثم أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	20	10	+M	0
B	40	5	0	0
C	+M	35	20	0
D	0	0	5	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا لا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

٣. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (A,2) وتساوي 10، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (B,4) و (D,4) ونحصل على المصفوفة الآتية:

رقم المجمع / المقاول	1	2	3	4
A	10	0	+M	0
B	40	5	0	10
C	+M	25	10	0
D	0	0	5	10

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٤. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

المقاول \ رقم المجمع	1	2	3	4
A	10	(0)	+M	0
B	40	5	(0)	10
C	+M	25	10	(0)
D	(0)	0	5	10

The optimal solution is: A → 2, B → 3, C → 4, D → 1

The Maximum Profit = 80 + 90 + 60 + 90 = 320 $

٤-٥ مسائل محلولة

سؤال (٤-١)

ترغب وزارة الصحة بتخصيص ثلاثة فرق للخدمة الصحية إلى ثلاثة مواقع ريفية بعيدة، فريق واحد لكل موقع، وعلى كل فريق السفر يومياً من المكتب الصحي الخاص بهِ إلى الموقع المخصص لهُ، وبسبب اختلاف البُعد بين هذهِ المكاتب الصحية والمواقع وكثرة مصاريف نقل هذهِ الفرق، ترغب الوزارة بتحديد التخصيص الأمثل لهذهِ الفرق والذي يحقق أقل تكلفة مُمكنة، الجدول التالي يوضح كلفة الساعة الواحدة من الخدمة التي يقدمها كل فريق في كل موقع مقدرة بالدولار، استخدم الطريقة الهنغارية لإيجاد أقل تكلفة مُمكنة.

رقم الموقع / فرق الخدمة	L_1	L_2	L_3
S_1	20	25	30
S_2	15	20	35
S_3	19	18	28

الحل:

١. التأكد من أن عدد الصفوف (n=3) = عدد الأعمدة (m=3) وهذا يعني ان المسألة متزنة.

٢. إعداد مصفوفة الفرصة الضائعة للساعات:

- تخفيض عدد الساعات في الصفوف، فنحصل على المصفوفة الآتية:

رقم الموقع / فرق الخدمة	L_1	L_2	L_3
S_1	0	5	10
S_2	0	5	20
S_3	1	0	10

- تخفيض عدد الساعات في الأعمدة، فنحصل على المصفوفة الآتية:

رقم الموقع / فرق الخدمة	L_1	L_2	L_3
S_1	0	5	0
S_2	0	5	10
S_3	1	0	0

٣. تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط المستقيمة (الأفقية والعمودية) في المصفوفة الأخيرة، ونلاحظ أنه لا يُمكن تغطية القيم الصفرية بأقل من ثلاثة خطوط، وبهذا نكون قد حققنا القاعدة الآتية:

No. of lines (-3) = No. of row or column (-3)

٤. إجراء التخصيص الأمثل باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

رقم الموقع / فرق الخدمة	L_1	L_2	L_3
S_1	0	5	(0)
S_2	(0)	5	10
S_3	1	(0)	0

The optimal solution is: $S_1 \rightarrow L_3$, $S_2 \rightarrow L_1$, $S_3 \rightarrow L_2$

The minimum time = 30 + 15 + 18 = 63 Hours.

سؤال (٤-٢)

في شركة معينة يوجد ثلاثة أعمال يمكن تشغيلها على ثلاثة الآلات، حيثُ أن كل عمل يمكن تشغيله على آلة واحدة فقط، والربح الصافي المتحصل عليه من تشغيل أي عمل على كل آلة مقدر بالـ (دولار / ساعة) موضح في الجدول الآتي:

رقم الآلة / العمل	M_1	M_2	M_3
J_1	5	7	9
J_2	14	10	12
J_3	15	13	16

المطلوب:

١. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة لتعظيم الأرباح.

٢. ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن مستخدماً الطريقة الهنغارية للوصول إلى ذلك.

الحل:

١. صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذهِ المشكلة لتعظيم الأرباح:

نستطيع كتابة النموذج الرياضي الخاص بهذهِ المشكلة كما يلي:

$$\text{Max. } Z = 5X_{11} + 7X_{12} + 9X_{13} + 14X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 15X_{31} + 13X_{32} + 16X_{33}$$

Sub. to

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} \le 1 \quad (\text{قيد تخصيص العمل } J_1)$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} \le 1 \quad (\text{قيد تخصيص العمل } J_2)$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33} \le 1 \quad (\text{قيد تخصيص العمل } J_3)$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} = 1 \quad (\text{قيد تخصيص الآله } M_1)$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1 \quad (\text{قيد تخصيص الآله } M_2)$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1 \quad (\text{قيد تخصيص الآله } M_3)$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$$

Or $(X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$

نُلاحظ أن أول ثلاثة قيود متعلقة بتخصيص الأعمال، حيثُ أن كل عمل يُمكن تخصيصه لآله واحدة على الأكثر لهذا تم كتابة القيود بالإشارة (≤)، أما القيود الثلاثة التالية لها فهي تتعلق بتخصيص الآلات لكل عمل، حيثُ يجب تخصيص آله واحدة فقط لكل عمل لهذا تم كتابة القيود بالإشارة (=)، ويُمكن حل مسألة البرمجة الخطية أعلاه باستخدام طريقة السمبلكس المبسطة.

٢. استخدام الطريقة الهنغارية لإيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن:

رقم الآلة / العمل	M_1	M_2	M_3
J_1	5	7	9
J_2	14	10	12
J_3	15	13	16

يتم استخدام الطريقة الهنغارية مع مسائل التعظيم بالشكل الآتي:

أ) نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=3) = عدد الأعمدة (m=3) وهذا يعني أن المسألة متزنة.

ب) بما أننا نملك مصفوفة الأرباح، لهذا يتم طرح جميع عناصر هذهِ المصفوفة من أكبر قيمة للربح وهي (16)، للحصول على مصفوفة التكاليف الضائعة الآتية:

رقم الآلة / العمل	M_1	M_2	M_3
J_1	11	9	7
J_2	2	6	4
J_3	1	3	0

ت) يُمكن الآن استخدام الطريقة الهنغارية، وذلك بطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ثم أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية (بعد الطرح من الصفوف ثم الأعمدة):

رقم الآلة / العمل	M_1	M_2	M_3
J_1	4	0	0
J_2	0	2	2
J_3	1	1	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو ثلاثة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=3) = No. of row or column (=3)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

ث) إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

العمل \ رقم الآلة	M_1	M_2	M_3
J_1	4	(0)	0
J_2	(0)	2	2
J_3	1	1	(0)

The optimal solution is: $J_1 \rightarrow M_2$, $J_2 \rightarrow M_1$, $J_3 \rightarrow M_3$

The Maximum Profit = 7 + 14 + 16 = 37 $/Hour.

سؤال (٤-٣)

مدير قسم مبيعات لديه أربع مراكز للبيع يرغب بتخصيصها لأربع عمال بيع ذو كفاءات متقاربة ويستطيعون العمل على أي مركز يتم توزيعهم عليه، ولكن بسبب القدرات الفردية المتباينة قدر المدير مصفوفة الكلف في حالة تخصيص كل مركز لكل عامل مقدرة بالدولارات كما في الجدول الآتي:

عمال البيع \ مركز البيع	1	2	3	4
A	80	40	50	46
B	40	70	20	25
C	30	10	20	30
D	35	20	25	30

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أقل كلفة مُمكنة لكل مقاول مستخدماً الطريقة الهنغارية.

الحل:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) = عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني أن المسألة متزنة.

٢. نطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية:

مركز البيع / عمال البيع	1	2	3	4
A	40	0	10	6
B	20	50	0	5
C	20	0	10	20
D	15	0	5	10

٣. نطرح أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية:

مركز البيع / عمال البيع	1	2	3	4
A	25	0	10	1
B	5	50	0	0
C	5	0	10	15
D	0	0	5	5

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=4)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (A,4) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (B,2) و (D,2) ونحصل على المصفوفة الآتية:

مركز البيع / عمال البيع	1	2	3	4
A	24	0	9	0
B	5	51	0	0
C	4	0	9	14
D	0	1	5	5

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو أربعة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=4) = No. of row or column (=4)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٥. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

مركز البيع / عمال البيع	1	2	3	4
A	24	0	9	(0)
B	5	51	(0)	0
C	4	(0)	9	14
D	(0)	1	5	5

The optimal solution is: A → 4 , B → 3 , C → 2, D → 1

The Maximum Profit = 46 + 20 + 10 + 35 = 111 $

سؤال (٤-٤)

أفترض أن لدينا خمسة عمال نستطيع تخصيصهم لإنجاز أربع مهام، الأوقات بالساعات التي يحتاجها كل عامل لإنجاز كل مهمة موضحة بالجدول التالي، كيف يُمكن تخصيص هذهِ المهام الأربعة للعمال الخمسة وذلك لتقليل الوقت الكلي، استخدم الطريقة الهنغارية لإجراء ذلك.

المهام / العمال	1	2	3	4
A	22	17	19	20
B	23	14	15	16
C	21	18	17	17
D	24	19	21	22
E	22	16	17	17

الحل:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=5) ≠ عدد الأعمدة (m=4) وهذا يعني أن المسألة غير متزنة، لهذا يتم إضافة مهمة (عمود) وهمي (5) بعناصر (أو أوقات) صفرية، وبالتالي تصبح المشكلة على النحو الآتي:

العمال \ المهام	1	2	3	4	5
A	22	17	19	20	0
B	23	14	15	16	0
C	21	18	17	17	0
D	24	19	21	22	0
E	22	16	17	17	0

٢. نطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ونرى أنه ليس هناك حاجة لإجراء ذلك بسبب امتلاكنا قيمة صفرية في كل صف وتبقى المصفوفة على حالها.

٣. نطرح أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية:

العمال \ المهام	1	2	3	4	5
A	1	3	4	4	0
B	2	0	0	0	0
C	0	4	2	1	0
D	3	5	6	6	0
E	1	2	2	1	0

No. of lines (=3) ≠ No. of row or column (=5)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (A,1) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (B,5) و (C,5) ونحصل على المصفوفة الآتية:

العمال \ المهام	1	2	3	4	5
A	0	2	3	3	0
B	2	0	0	0	1
C	0	4	2	1	1
D	2	4	5	5	0
E	0	1	1	0	0

No. of lines (=4) ≠ No. of row or column (=5)

٥. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (C,4) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (B,1) و (B,5) و (E,1) و (E,5) ونحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	1	2	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	3	1	0	1
D	2	3	4	4	0
E	1	1	1	0	1

No. of lines (=4) ≠ No. of row or column (=5)

٦. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (A,2) وتساوي 1، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (B,1) و (B,4) و (B,5) ونحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	0	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	0	0	1
D	2	2	3	4	0
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو خمسة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (=5) = No. of row or column (=5)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٧. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	0	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	0	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ أن جميع العمال المتبقون يملكون اثنتان أو ثلاثة من القيم الصفرية، وهذهِ إشارة إلى وجود أكثر من حل بديل (تعدد الحلول المثلى)، هذا التعدد في القيم الصفرية يولد لنا عدة حالات هي (نبدأ بالذي يملك صفرين فقط وهو العامل A):

- **الحالة الأولى** يستطيع العامل A إنجاز المهمة 1، لهذا يلغى العامل A والمهمة 1، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الأول والعمود الأول ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	0	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ أيضاً أن جميع العمال المتبقون يملكون اثنتان أو ثلاث من القيم الصفرية، هذا التعدد في القيم الصفرية يولد لنا عدة حالات فرعية أخرى منبثقة من الحالة الأولى هي (نبدأ بالذي يملك صفرين فقط وهو العامل C):

✓ التفرع الأول: يستطيع العامل C إنجاز المهمة 3، لهذا يلغى العامل C والمهمة 3، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثالث والعمود الثالث ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	(0)	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ أن كلا من العامل B و E يملكون اثنتان من القيم الصفرية، هذا يولد لنا حالتين فرعية أخرى منبثقة من التفرع الأولى هي:

- العامل B ينفذ المهمة 2، والعامل E ينفذ المهمة 4، فنحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	(0)	0	0	2
C	0	2	(0)	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	(0)	1

The 1st optimal solution is: A → 1 , B → 2 , C → 3 , D → 5 , E → 4

The minimum time = 22 + 14 + 17 + 0 + 17 = 70 Hours.

- العامل B ينفذ المهمة 4، والعامل E ينفذ المهمة 2، فنحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	0	0	(0)	2
C	0	2	(0)	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	(0)	0	0	1

The 2nd optimal solution is: A → 1 , B → 4 , C → 3 , D → 5 , E → 2

The minimum time = 22 + 16 + 17 + 0 + 16 = 71 Hours.

✓ التفرع الثاني: يستطيع العامل C إنجاز المهمة 4، لهذا يلغى العامل C والمهمة 4، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثالث والعمود الرابع ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	0	(0)	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ أن كلا من العامل B و E يملكون اثنتان من القيم الصفرية، هذا يولد لنا حالتين فرعية أخرى منبثقة من التفرع الثاني هي:

- العامل B ينفذ المهمة 2، والعامل E ينفذ المهمة 3، فنحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	(0)	0	0	2
C	0	2	0	(0)	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	(0)	0	1

The 3rd optimal solution is: A → 1 , B → 2 , C → 4 , D → 5 , E → 3

The minimum time = 22 + 14 + 17 + 0 + 17 = 70 Hours.

- العامل B ينفذ المهمة 3، والعامل E ينفذ المهمة 2، فنحصل على المصفوفة الآتية:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	(0)	0	1	2	0
B	3	0	(0)	0	2
C	0	2	0	(0)	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	(0)	0	0	1

The 4th optimal solution is: A → 1 , B → 3 , C → 4 , D → 5 , E → 2

The minimum time = 22 + 15 + 17 + 0 + 16 = 70 Hours.

- **الحالة الثانية** يستطيع العامل A إنجاز المهمة 2، لهذا يلغى العامل A والمهمة 2، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الأول والعمود الثاني ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	(0)	1	2	0
B	3	0	0	0	2
C	0	2	0	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	0	1

نُلاحظ أيضاً أن جميع العمال المتبقون يملكون اثنتان أو ثلاثة من القيم الصفرية، هذا التعدد في القيم الصفرية يولد لنا عدة حالات فرعية أخرى منبثقة من الحالة الثانية هي (نبدأ بالذي يملك صفرين فقط وهو العامل B):

✓ التفرع الأول: يستطيع العامل B إنجاز المهمة 3، لهذا يلغى العامل B والمهمة 3، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثاني والعمود الثالث ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	(0)	1	2	0
B	3	0	(0)	0	2
C	(0)	2	0	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	0	(0)	1

The 5th optimal solution is: A → 2 , B → 3 , C → 1 , D → 5 , E → 4

The minimum time = 17 + 15 + 21 + 0 + 17 = 70 Hours.

✓ التفرع الثاني: يستطيع العامل B إنجاز المهمة 4، لهذا يلغى العامل B والمهمة 4، وتهمل أي قيمة صفرية متبقية في الصف الثاني والعمود الرابع ونستمر بالتخصيص:

المهام / العمال	1	2	3	4	5
A	0	(0)	1	2	0
B	3	0	0	(0)	2
C	(0)	2	0	0	1
D	2	2	3	4	(0)
E	1	0	(0)	0	1

The 6th optimal solution is: A → 2, B → 4, C → 1, D → 5, E → 3

The minimum time = 17 + 16 + 21 + 0 + 17 = 71 Hours.

نُلاحظ في المسألة أعلاه أننا نملك 6 تخصيصات مختلفة، أربعة منها فقط مثلى نُعطي أقل وقت كلي ممكن ومقدارة (70) ساعة لإنجاز هذهِ المهام من قبل العمال، بينما اثنتان منها غير مثلى أعطت وقت قريب من الأمثل ومقدارة (71) ساعة، هذهِ الحلول المثلى البديلة تُعطي لمتخذ القرار المرونة في اختيار التخصيص الذي يناسبه.

- التخصيصات المثلى هي:

- The 1st optimal solution is: A → 1 , B → 2 , C → 3 , D → 5 , E → 4
- The 3rd optimal solution is: A → 1 , B → 2 , C → 4 , D → 5 , E → 3
- The 4th optimal solution is: A → 1 , B → 3 , C → 4 , D → 5 , E → 2
- The 5th optimal solution is: A → 2 , B → 3 , C → 1 , D → 5 , E → 4

- أما التخصيصات غير المثلى فهي:

- The 2nd optimal solution is: A → 1 , B → 4 , C → 3 , D → 5 , E → 2
- The 6th optimal solution is: A → 2 , B → 4 , C → 1 , D → 5 , E → 3

سؤال (٤-٥)

أوجد التخصيص الأمثل لأربع مهام نرغب بتخصيصها لخمسة مكائن، وذلك لتعظيم الأرباح، ثم قارن نتائجها مع نتائج طريقة أقصى الأرباح (في حالة اعتبار هذهِ المسألة هي مسألة نقل)، ثم أرسم شبكة توضح التخصيص الأمثل إذا كانت لديك مصفوفة الأرباح الآتية:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	62	78	50	101	82
2	71	84	61	73	59
3	87	92	111	71	81
4	48	64	87	77	80

الحل:

المطلوب الأول: إيجاد التخصيص الأمثل بالطريقة الهنغارية:

١. نُلاحظ أن عدد الصفوف (n=4) ≠ عدد الأعمدة (m=5) وهذا يعني أن المسألة غير متزنة، لهذا يتم إضافة مهمة (صف) وهمية (5) بعناصر (أو أرباح) صفرية، وبالتالي تصبح المشكلة على النحو الآتي:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	62	78	50	101	82
2	71	84	61	73	59
3	87	92	111	71	81
4	48	64	87	77	80
5	0	0	0	0	0

٢. بما أننا نملك مصفوفة الأرباح، لهذا يتم طرح جميع عناصر هذهِ المصفوفة من أكبر قيمة للربح وهي (111)، للحصول على مصفوفة التكاليف الضائعة الآتية:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	49	33	61	10	29
2	40	27	50	38	52
3	24	19	0	40	30
4	63	47	24	34	31
5	0	0	0	0	0

٣. يُمكن الآن استخدام الطريقة الهنغارية، وذلك بطرح أقل كلفة في كل صف من ذلك الصف، ثم أقل كلفة في كل عمود من ذلك العمود، لنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية (بعد الطرح من الصفوف ثم الأعمدة):

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	39	23	51	0	19
2	13	0	23	1	25
3	24	19	0	40	30
4	39	23	0	10	7
5	0	0	0	0	0

No. of lines (=4) ≠ No. of row or column (=5)

٤. طالما أن عدد خطوط التغطية لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا بحاجة إلى المزيد من التخفيضات، نُلاحظ أن أقل قيمة من القيم غير المغطاة هي في الخلية (4,E) وتساوي 7، حيث نقوم بطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها إلى نقاط تقاطع خطوط التغطية عند الخلايا (5,B) و (5,C) و (5,D) ونحصل على المصفوفة الآتية:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	32	23	51	0	12
2	6	0	23	1	18
3	17	19	0	40	23
4	32	23	0	10	0
5	0	7	7	7	0

نُلاحظ في المصفوفة أعلاه أن أقل عدد من خطوط التغطية للقيم الصفرية هو خمسة وهذا يحقق القاعدة الآتية:

No. of lines (-5) - No. of row or column (-5)

نتوقف بسبب تحقق شرط التساوي أعلاه.

٥. إجراء التخصيص الأمثل وذلك باستخدام الخلايا التي تحتوي على القيم الصفرية:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E
1	32	23	51	(0)	12
2	6	(0)	23	1	18
3	17	19	(0)	40	23
4	32	23	0	10	(0)
5	(0)	7	7	7	0

The optimal solution is: 1 → D , 2 → B , 3 → C , 4 → E , 5 → A

The Maximum Profit = 101 + 84 + 111 + 80 + 0 = 376.

في التخصيص الأمثل أعلاه نُلاحظ أنه تم تخصيص المهمة (5) الوهمية للماكنة (A)، وهذا يعني من الناحية العملية أنهُ لن يتم تخصيص أحد المكائن (وهي A) لأي مهمة.

المطلوب الثاني: إيجاد التخصيص الأمثل بطريقة أقصى الأرباح:

المكائن / المهام	A	B	C	D	E	العرض
1	62	78	50	101 1	82	~~1~~ ~~0~~
2	71	84 1	61	73	59	~~1~~ ~~0~~
3	87	92	111 1	71	81	~~1~~ ~~0~~
4	48	64	87	77	80 1	~~1~~ ~~0~~
5	0 1	0	0	0	0	~~1~~ ~~0~~
الطلب	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	

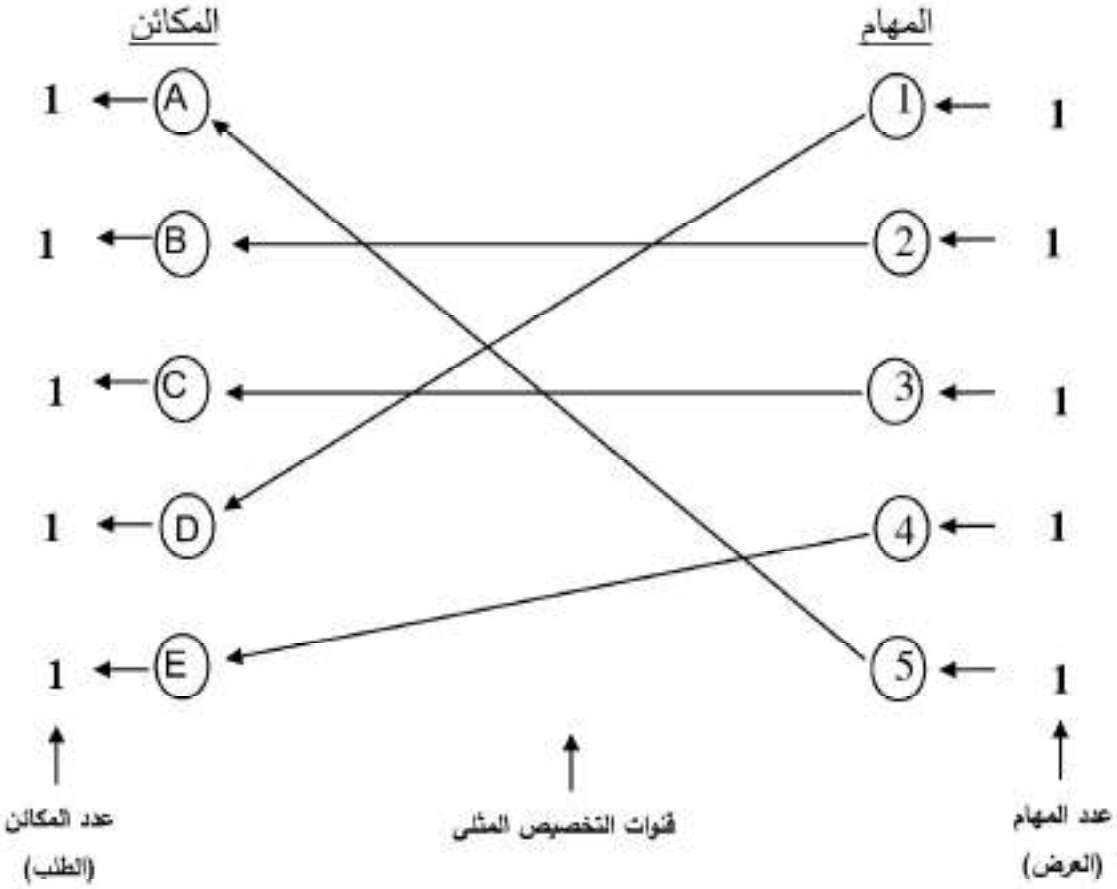
عدد الحلول المقبولة التي تم الحصول عليها (N = 5) وهي وفق القيم:

$X_{1D} = 1$, $X_{2B} = 1$, $X_{3C} = 1$, $X_{4E} = 1$, $X_{5A} = 1$

Max. Profit Z = 101 (1) + 84 (1) + 111 (1) + 80 (1) + 0 (1) = 376.

نلاحظ أن قيمة الحل الأمثل لطريقة أقصى الأرباح مكافئة لما تم الحصول عليه من الطريقة الهنغارية.

المطلوب الثالث: رسم شبكة توضح التخصيص الأمثل لطريقة أقصى الأرباح:



تمارين الفصل الخامس

تمرين (٤-١)

الشركة العامة للمواصلات تمتلك 5 عربات قطار موزعة على 5 محطات مختلفة في أرجاء العراق، وترغب باستخدامها لإيصال الزبائن ما بين هذهِ المحطات، الجدول التالي يوضح المسافة بالأميال التي تحتاجها هذهِ العربات للتنقل ما بين تلك المحطات المختلفة:

رقم العربة / المحطة	1	2	3	4	5
I	10	5	9	18	11
II	13	9	6	12	14
III	3	2	4	4	5
IV	18	9	12	17	15
V	11	6	14	19	10

المطلوب: ما هو التخصيص الأمثل الذي يجعل المسافة الكلية بالأميال أقل ما يُمكن مستخدماً الطريقة الهنغارية، ثم أرسم شبكة تُمثل التخصيص الأمثل لهذهِ الطريقة.

تمرين (٤-٢)

تملك أحدى المنشآت الصناعية أربع آلات (M_1, M_2, M_3, M_4) في أحد الأقسام الإنتاجية، وتستطيع كل آله أن تصنع أي أمر من أوامر التشغيل (J_1, J_2, J_3, J_4)

الموكل تصنيعها لإدارة هذا القسم الإنتاجي، والربح الصافي المتحصل عليه من تنفيذ كل أمر تشغيل على كل آلة مقدر بالـ (دولار / ساعة) موضح في الجدول الآتي:

رقم الآلة / أمر التشغيل	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	9	7	13	8
J_2	16	16	11	15
J_3	19	16	15	10
J_4	17	16	16	14

المطلوب:

١. صغ نموذج برمجة خطية لهذه المشكلة لتعظيم الأرباح.

٢. ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن مستخدماً الطريقة الهنغارية للوصول إلى ذلك.

تمرين (٤-٣)

تسعى شركة معينة لإيجار مخزناً جديداً وترغب بمعرفة كيف يُمكن لها تخصيص أربعة أقسام في أربعة مواقع وذلك لزيادة الربح الكلي، الجدول أدناه يوضح كمية الربح التي قد تُجنيها الشركة من خلال تخصيص هذه الأقسام في المواقع الأربعة مقدرة بآلاف الدولارات:

رقم الموقع / الأقسام	M_1	M_2	M_3	M_4
Shoes (D_1)	12	10	4	11
Toys (D_2)	6	16	12	15
Chinaware (D_3)	20	18	16	16
Books (D_4)	16	15	13	14

المطلوب:

١. ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن مستخدماً الطريقة الهنغارية.

٢. ما هو التخصيص الأمثل الذي يحقق أكبر ربح مُمكن مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي أولاً وطريقة فوجل التقريبية ثانياً، وقارن نتائجهما مع نتائج الفرع (1).

تمرين (٤-٤)

موقع على الانترنيت يُعنى بالراغبين بالزواج، حيثُ يتم تنظيم البيانات الخاصة بالشباب والشابات وفق المعايير المطلوبة من قبلهم، يقوم المكتب بإعطاء درجة التوافق بين كل شاب وشابة (درجة السعادة المتوقعة إذا حدث نصيب)، بفرض وجود الدرجات الآتية عن أربع شباب (M_1, M_2, M_3, M_4) ، وأربع شابات (F_1, F_2, F_3, F_4):

الشابات / الشباب	F_1	F_2	F_3	F_4
M_1	8	5	1	11
M_2	1	8	9	9
M_3	10	5	3	10
M_4	11	12	13	1

تهدف المسألة إلى تخصيص التوافق الأنسب بين الشباب والشابات بحيث يكون الهدف تعظيم مجموع درجات السعادة لكل الأزواج.

المطلوب: وضع المشكلة أعلاه كمسألة تخصيص وإيجاد التخصيص الأمثل للتوفيق بين الأزواج (الهدف هو تعظيم القيمة الكلية).

تمرين (٤-٥)

ترغب جامعة جيهان – أربيل في عقد ندوات تثقيفية للطلاب في أربعة مجالات هي (الاقتصادي ، السياسي ، الديني ، الثقافي)، بحيث تتناول كل ندوة موضوع واحد من هذه الموضوعات الأربعة، ولقد تقرر أن تعقد تلك الندوات مرة كل أسبوع في المساء، ويتطلب جدول هذه الندوات بذل عناية فائقة من جانب المنظمين لها بحيث يكون عدد الطلاب غير القادرين على الحضور أقل ما يُمكن، وتُشير الدراسات الدقيقة من قبل المنظمين للندوات إلى أن عدد الطلاب الذين لا يستطيعون الالتحاق بندوة معينة في يوم معين هو كالآتي:

مجال الندوة / الأيام	اقتصادي	سياسي	ديني	ثقافي
السبت	60	90	80	25
الأحد	75	75	75	40
الاثنين	45	60	60	30
الثلاثاء	50	70	70	45
الأربعاء	30	45	55	35

المطلوب:

١. صغ نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

٢. أوجد التخصيص الأمثل للندوات على الأيام المختلفة بحيث يكون عدد الطلاب غير القادرين على الحضور أقل ما يُمكن (لاحظ أن المسألة غير متزنة).

٣. في حالة إلغاء يوم الاثنين ليكون يوم استراحة، فهل سيتأثر التخصيص الأمثل بذلك، استخدم طريقة أقل الكلف (في حالة افتراض أن المسألة هي مشكلة نقل) لإثبات صحة كلامك.

تمرين (٤-٦)

ترغب إحدى المنشآت النفطية العراقية في بناء أربعة مخازن في بغداد لإدواتها الأحتياطية، ولقد تعاملت الشركة في الماضي مع خمس شركات للمقاولات تعمل في مجال الإنشاءات، ولكفاءة وسمعة هذه الشركات جميعاً فقد دعتهم لتقديم عروض لكل عملية من عمليات بناء المخازن، وكانت العروض النهائية التي تقدمت بها شركات المقاولات كالآتي (القيمة بألاف الدولارات):

شركات المقاولات / المخازن	Comp1	Comp2	Comp3	Comp4	Comp5
Store1	77	75	69	76	62
Store2	64	66	75	68	71
Store3	70	72	68	75	68
Store4	63	65	76	69	70

وترغب المنشآة النفطية في الإنتهاء من بناء هذه المخازن في أسرع وقت ممكن، ولهذا فإنها تنوي أعطاء عملية واحدة على الأكثر لكل شركة يقع عليها الاختيار.

المطلوب: أوجد التخصيص الأمثل الذي ينتج عنه أقل تكلفة كلية للمنشأة النفطية في بناء هذه المخازن.

مُلاحظة (٤-٢): المسألة غير متزنة لهذا يفضل إضافة مخزن وهمي (Dummy store5) بكلف صفرية.

الفصل الخامس

شبكات الأعمال Network Analysis

٥-١ مقدمة Introduction

تمتاز كثير من المشكلات التي تواجهنا في الواقع العملي بالتعقيد الأمر الذي يتطلب أحياناً تمثيلها في شكل شبكة أعمال، واستخدام أساليب تخطيطية أكثر كفاءة بهدف تحقيق الكفاءة المثلى عند التنفيذ، وتأتي هذه الكفاءة من إمكانية تقليل الوقت المطلوب لإنجاز المشروع الكلي ضمن شروط مقبولة أقتصادياً من خلال استخدام الموارد المتاحة.

يُعرف المشروع بأنه مجموعة من الانشطة المترابطة منطقياً فيما بينها ويجب أن تنفذ في توقيت زمني معين قبل أن يتم أنجاز المشروع الكلي، كما تتميز هذه الأنشطة بأنها قد تكون متتالية (متتابعة) أو أنها متوازية التنفيذ (أي يمكن تنفيذ بعض الأنشطة بشكل متزامن)، كما أن لكل مشروع وقت أنتهاء معين، وكلمة النشاط هنا تُشير إلى العمل الذي يستغرق وقتاً ويتطلب موارد من أجل إتمامه.

ومن أمثلة ذلك تخطيط المشاريع الكبيرة (سدود، جسور، مصانع، ... إلخ) وشبكات النقل (خطوط الاتصالات السلكية واللاسلكية، الخطوط الجوية أو البرية أو البحرية) التي تربط المدن والدول وذلك لإيجاد أقصر طريق أو مسار في تلك الشبكة، وتحقيق أقصى تدفق مُمكن للسيارات عبر شوارع المدينة أو تقليل الوقت الضائع للمواطنين بسبب مشكلة المرور أو تقليل تكاليف تلوث البيئة الناتج عن عوادم

السيارت، ومسألة إيجاد نقاط الربط المثلى في شبكة معينة والتي تجعل من الممكن أن نصل بين أي نقطتين في الشبكة بطريقة تكون فيها مسافة الربط الكلية للشبكة أقل ما يمكن، وما شابه ذلك من حالات يمكن التعبير عنها على شكل شبكة مكونة من عدة فروع مترابطة، وقد تطورت نظرية تحليل الشبكات ودراستها بشكل أصبح معه من الممكن تخطيط ومراقبة وضبط الموارد والأنشطة في أي مسألة بطريقة توصل إلى الأهداف بشكل فعّال، مع إمكانية تغيير تسلسل الأنشطة والحوادث لتحقيق إنجاز أفضل (تقليل زمن وتكلفة الإنجاز) للمشاريع ضمن الموارد المتوافرة لدينا[١] [٢] [٣].

٥-٢ تكوين شبكة الأعمال Construct of the Network

هناك خطوات أساسية يجب أتباعها لجمع المعلومات اللازمة لوصف طبيعة كل نشاط والإجراءات اللازمة لإنجازه وذلك من خلال الإجابة على الأسئلة الآتية[٤] [٥] [٦]:

١. ما السمات العامة للمشروع ومجموعة الأنشطة المتعلقة بها؟

٢. ما هي الفترة الزمنية اللازمة لإكمال كل نشاط من أنشطة المشروع؟

---

(١) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٨.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٩٤.

(٣) البلخي، زيد تميم، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٠.

(٤) فريحات، حيدر محمد، وعواد، محمد سليمان، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٨٣.

(٥) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٩٥.

(6) Gerd Finke, (2008), "Operations research and networks", ISTE Ltd., UK, p. 29.

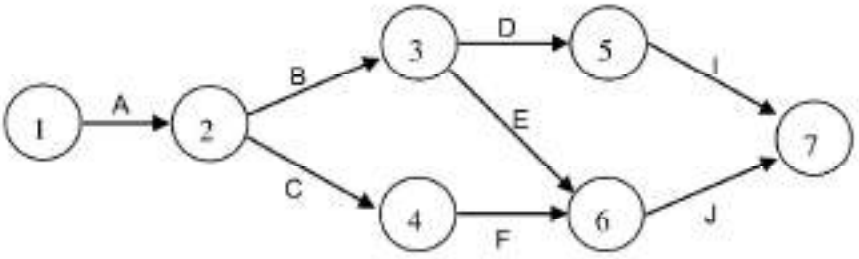
٣. تحديد العلاقة التتابعية أو التزامنية بين الأنشطة (هل يمكن تنفيذ أكثر من نشاط في آن واحد)؟
٤. ما هي المواد اللازمة والأيدي العاملة والخبرات الفنية المتيسرة لتنفيذ المشروع؟
٥. ما هو رأس المال المتوفر لتنفيذ المشروع؟
٦. ما موقع المشروع وقربه من مواقع الحياة الأخرى؟

وبناءاً على الخطوات أعلاه يتم رسم شبكة توضح سير عمليات المشروع بكامله من بدايته إلى نهايته وتقدير اللوازم المطلوبة ودراسة الإمكانيات المتاحة لتنفيذ المشروع قبل أوانه وماذا يحدث لو تأخر المشروع، ما هو المردود وما هي أقل تكلفة ممكنة لتحقيق عمليات الإنتاج الممكنة ووضع البدائل الممكنة لتقليل الفترات الزمنية الطويلة ومقايضتها عند الحاجة بالتكاليف، وذلك ضمن الموارد المتاحة للمشروع ومقدار الحاجة إلى عمليات التسريع، كل هذا يجب أن يكون واضحاً ومعروفاً حتى نتمكن من الوصول إلى الهدف المنشود.

٥-٢-١ تعاريف ومصطلحات أساسية Basic Definitions and Terminology

- **الشبكة Network:** هي مجموعة من العقد (Nodes) ومجموعة من الأقواس (Arcs) أو الخطوط (Lines) التي تصل بين أزواج العقد، ويرمز للعقد أما بحروف

أو أعداد متسلسلة، وللأقواس والخطوط بأسماء العقد التي تصل بينها، مثال على ذلك الشبكة الآتية:



شكل (٥-١) يوضح مثال لشبكة الأعمال

في الشبكة أعلاه نُلاحظ أن لدينا الأنشطة (A, B,....J) والتي تربط العقد ذات التسلسل من (1) إلى (7)، وتُشير العقد على الشبكة إلى موقع أو مدينة أو محطة معينة، وتُشير الخطوط الممتدة عبر هذه العقد إلى الطرق التي تصل بين المواقع أو المدن أو المحطات، وبعضها قد يشير إلى خطوط أنابيب المياه أو الغاز أو الصرف الصحي في مدينة معينة.

- **الخط الموجه (القوس) Directed Line (Arc):** يكون الخط موجهاً إذا كان له أتجاه مرتبط به وتُحدد الاتجاهات بوضع أسهم على الخطوط (●⟵)، مثال ذلك النشاط (A) في شكل (٥-١) حيث أن حركة هذا النشاط تبدأ من العقدة (1)

وتنتهي بالعقدة (2) ولا يسمح بحركة معاكسة من (1) إلى (2)، أما الخطوط غير الموجه (●——●) فيسمح لها بالحركة بأتجاهين متعاكسين(*).

- **المسار Path:** أن تتابع الخطوط (مع إهمال إتجاهاتها) التي تصل بين العقدة i والعقدة j يسمى مسار هاتين العقدتين، وإذا كان (j = i) عندئذ يشكل المسار حلقة (Loop)، مثال ذلك المسار المتسلسل الذي يتشكل من تتابع الأنشطة (A→B→D→I) في شكل (٥-١) والتي قد تُكتب بشكل آخر بالصورة (1→2→3→5→7) أو (7-5-3-2-1)، أما تتابع الأنشطة (7-6-2-1) فهي لا تشكل مساراً بسبب عدم توفر صيغة الترابط التتابعي بين هذه الأنشطة.

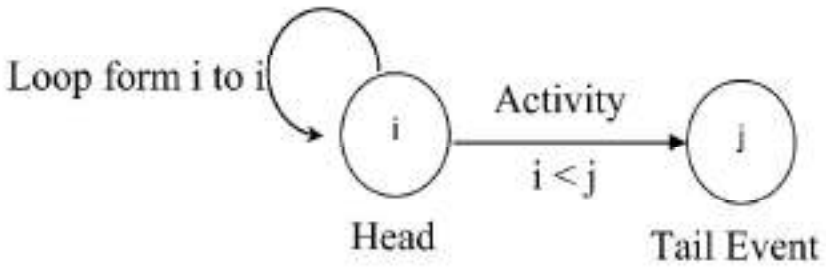
- **النشاط Activity:** أن أي مشروع يقسم إلى مجموعات صغيرة، يمكن السيطرة عليها بسهولة، وهذه المجموعات تدعى الأنشطة، والتي يجب أن تُنفذ وفق تسلسل أو ترتيب معين بقصد الوصول إلى الهدف النهائي للمشروع، وكل نشاط في المشروع يمثل خط موجه وعقدتين لتمثيل بداية ونهاية النشاط، وتسمى عقدة بداية النشاط بالحدث الأمامي (Head Event) وعقدة نهاية النشاط بالحدث الخلفي (Tail Event) كما في الشكل التالي.

(*) راجع المصدر:

Pinedo, Michael L., (2005), "Planning and Scheduling in Manufacturing and Services", Springer Science+Business Media, Inc., USA.

الصفحة ٢٤ لمعرفة المزيد عن أنواع الأنشطة الموجهة وغير الموجهة وأنواع المسارات والعقد.

ويطلق على الحدث الذي يُحدد بداية المشروع بحدث البداية (Start Event Project)، والذي يُحدد نهاية المشروع الحدث الأخير (النهائي) (Final Event Project)، كما في شكل (٥-٢) الآتي:



شكل (٥-٢) يوضح مفهوم النشاط وعقدتي البداية والنهاية

٥-٢-٢ تقسيم الأنشطة من حيث التتابع الفني والترتيب المنطقي للمهام المختلفة

Division of Activities in Terms of the Relay Technical and Logical Arrangement of the Various Tasks

١. **أنشطة متتابعة (متعاقبة):** هي تلك الأنشطة التي تحدث في ترتيب متتابع (متعاقب)، أي يرتبط إنجاز هذهِ الأنشطة بالإنتهاء من الأنشطة السابقة، وبالتالي فهي تأخذ تسلسلاً معيناً تحكمه العملية الفنية، فالأنشطة B و C لا يُمكن تنفيذها إلا بعد أنتهاء تنفيذ A.

٢. **أنشطة متوازية:** هي الأنشطة التي يُمكن تنفيذها في نفس الوقت، أي بشكل متزامن بحيث يُمكن تنفيذ أكثر من نشاط في وقت واحد، ولا يشترط أن تبدأ

جميعها في لحظة معينة أو أن تنتهي جميعها في لحظة محددة، مثال ذلك النشاطين B و C.

٥-٢-٣ تقسيم الأنشطة من حيث الوقت والموارد المستنفدة في النشاط

Division of Activities in Terms of Time and Resources Used in Activity

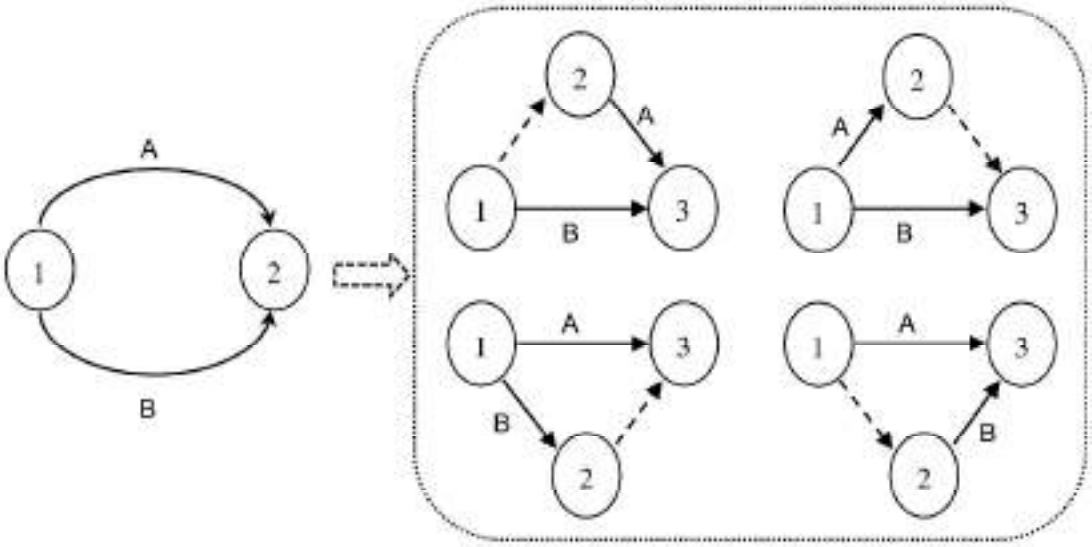
١. **أنشطة حقيقية Real Activities:** وهي تعبر عن الأعمال أو المهام التي يجب تنفيذها للأنتقال من حدث معين إلى آخر على شبكة الأعمال، وهي تُمثل إنجازات معينة تستغرق وقتاً في تنفيذها وتتطلب موارد لأزمنة هذا التنفيذ، ممثلة في توفير المواد والآلات والمعدات المختلفة، ويعبر عن هذهِ الأنشطة بسهم متصل يربط بين حدثي النشاط.

٢. **أنشطة أنتظار Waiting Activities:** وهي الأنشطة التي يستغرق تنفيذها وقتاً معيناً لإنجازها دون الحاجة إلى موارد، مثال ذلك أنتظار جفاف جدران المبنى كي ننتقل إلى نشاط طلاء هذهِ الجدران.

٣. **أنشطة وهمية Dummy Activities:** وهي الأنشطة التي ليس لها وجود مادي، وتستخدم لتحقيق التتابع الفني المنطقي في تسلسل تنفيذ الأحداث في شبكة الأعمال ولأغراض الألتزام بالقواعد الأساسية في رسم شبكات الأعمال، ولا تحتاج هذهِ الأنشطة إلى أي نوع من الموارد، ولا تستغرق وقتاً، أي تستنفذ وقتاً يساوي

دائماً صفراً، وترسم الأنشطة الوهمية بأسهم ذات خطوط متقطعة لتمييزها عن الأنشطة الحقيقية، حيث يتم وضع هذه الأنشطة في حالات خاصة، كما في حالة أن يكون هنالك نشاطين يبدأن من نفس العقدة (i) وينتهيان في نفس العقدة (j) أيضاً (هذا لا يجوز منطقياً)، لذا يتم استخدام النشاط الوهمي لتجاوز هذه المشكلة وأعادة رسم الشبكة بأربع صيغ مختلفة كل واحدة منها تعطي نفس النتيجة كما في شكل (٥-٣) التالي[1].

كما أن هناك بعض الحالات الخاصة الأخرى التي يستخدم فيها النشاط الوهمي سيتم الأشارة إليها لاحقاً في أمثلة ومسائل هذا الفصل.



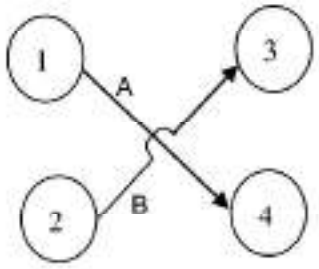
شكل (٥-٣) يوضح بعض الحالات الخاصة باستخدام النشاط الوهمي

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 277.

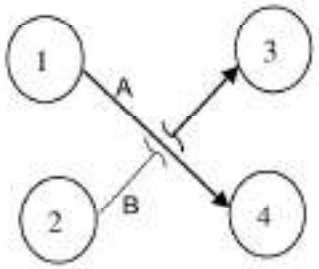
٥-٢-٤ قواعد بناء شبكات الأعمال Network Construction Rules

١. يجب أن تحتوي الشبكة عقدة منبع على الأقل تدل على بداية المشروع وعقدة مصب تدل على نهاية المشروع.

٢. نبدأ برسم الشبكة من اليسار إلى اليمين مبتدئين من اليسار بالعقدة التي تدل على بداية المشروع، ثم نتابع بعدها رسم الخطوط الدالة على بقية الأنشطة في المشروع كلاً بحسب أسبقيتها ونبتعد عن التقاطعات التي قد تحدث بين خطوط الأنشطة وذلك باستخدام فكرة الجسر أو التقاطع المقطوع (كما في رسوم الهندسة الألكترونية) وكما يأتي:



فكرة الجسر



فكرة التقاطع المقطوع

٣. يجب الأنتباه إلى أن طول الخط المرسوم الذي يُمثل نشاط معين ليس له علاقة بمدة تنفيذ هذا النشاط، ويتم اختيار أطوال الخطوط بشكل أعتباطي ومناسب لرسم الشبكة، أما مدة تنفيذ النشاط فنعبر عنها عادة برقم يكتب فوق أو جانب الخط الذي يعبر عن هذا النشاط.

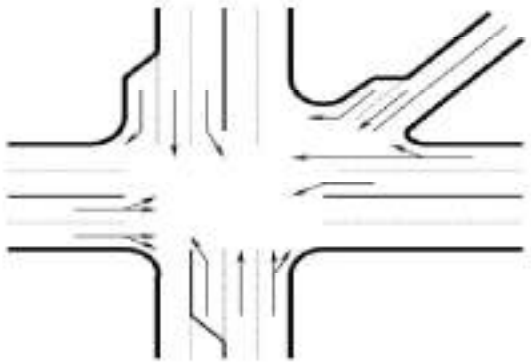
٤. يجب أن يتم ترقيم عقد الشبكة التي تُمثل المشروع بشكل منطقي من الرقم (1) وبشكل تصاعدي حيث (j > i)، أي لا تسبق العقدة (j) العقدة (i) ومن الممكن أن تكون أحدهما تحت الأخرى، على أن لا يتكرر رقم العقدة مرة أخرى في نفس الشبكة.

٥. يُمكن لهذه المشاريع أن تكون قد بدأت وفق التخطيط المُعد ووفق الشبكة المرسومة التي تم تحديدها، بعد ذلك حدثت تغيرات في جدولة هذه المشاريع، يُمكن عندها رسم شبكة جديدة اعتباراً من النقطة التي وصل إليها المشروع، لاحتواء التغيرات التي طرأت عليه.

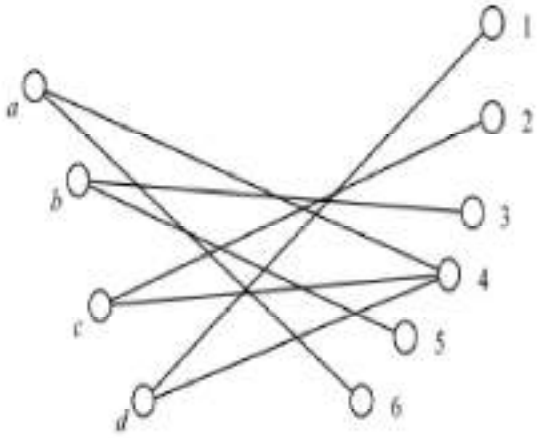
من شكل (٥-٤) التالي تتضح مدى الفائدة المتوقعة من حل مشكلة التقاطعات المرورية عند الأشارات الضوئية في الشوارع الرئيسية والفرعية ذات الزخم العالي، حيث يمكن استخدام شبكات الأعمال لحل مثل هكذا مشاكل وذلك بتحديد عدد الأشارات الضوئية الموضوعة عند كل تقاطع والتحكم بزمن تشغيلها بشكل يجعل وقت أنتظار مستخدمي الطريق أقل ما يُمكن والحصول على أقل عدد من الحوادث.

بنفس المبدأ يوضح شكل (٥-٥) التقاطعات المرورية لطائرات مطار معين، ورغم السرعة التي تمتاز بها هذه الطائرات فإن شروط السلامة تقتضي أن تطير الطائرات ذات المسار المتقاطع بمستويات جوية مختلفة، وبالنتيجة تعمل نماذج شبكات

الأعمال على حل هذهِ المشكلة وصولاً إلى أقل عدد من المستويات التي تطير بها هذهِ الطائرات لتجنب حوادث التصادم[1].



شكل (٥-٤) يوضح مشكلة التقاطعات عند اشارات المرور



شكل (٥-٥) يوضح مشكلة التقاطعات في الرحلات الجوية بين المدن

مثال (٥-١): أرسم شبكة الأعمال الخاصة بمشروع معين والتي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

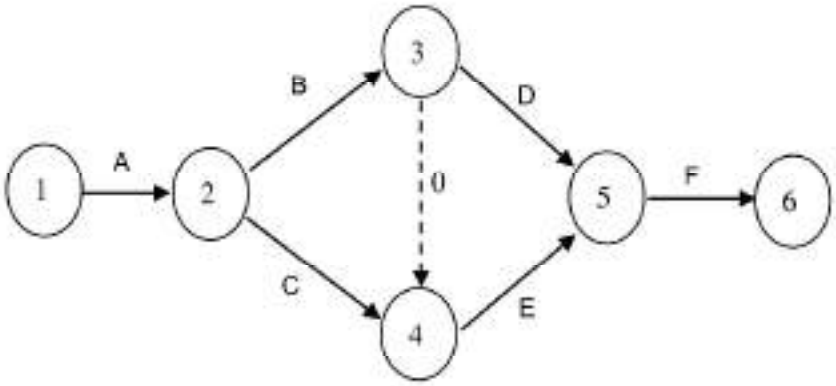
(1) Gerd Finke, **Op. Cit.**, p. 51.

Relationships العلاقات

1. A, the first activity of the project.
2. A, precedes B & C.
3. B, precede D.
4. B & C precede E.
5. D & E precede F.

يفضل أعادة ترتيب الأنشطة في الجدول المجاور

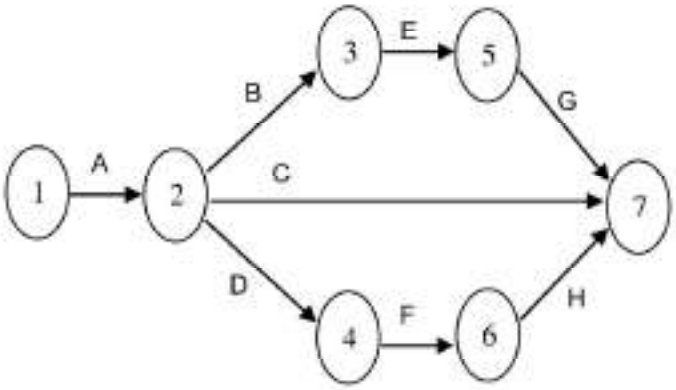
Activity	Precede Activity
A	----
B	A
C	A
D	B
E	B , C
F	D , E



مثال (٥-٢): أرسم شبكة الأعمال التي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

Activity	Pre. Act.
A	---
B	A
C	A
D	A
E	B
F	D
G	E
H	F

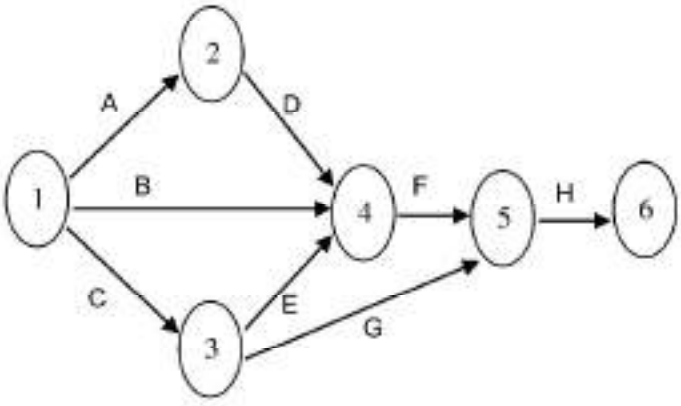
الحل: بالاعتماد على جدول الأسبقيات المجاور يتم رسم شبكة الأعمال بالشكل الآتي:



مثال (٥-٣): أرسم شبكة الأعمال التي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

Activity	Pre. Act.
A	---
B	---
C	---
D	A
E	C
F	B,D,E
G	C
H	F,G

الحل: بالاعتماد على جدول الأسبقيات المجاور يتم رسم شبكة الأعمال بالشكل الآتي:



مثال (٥-٤): أرسم شبكة الأعمال التي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

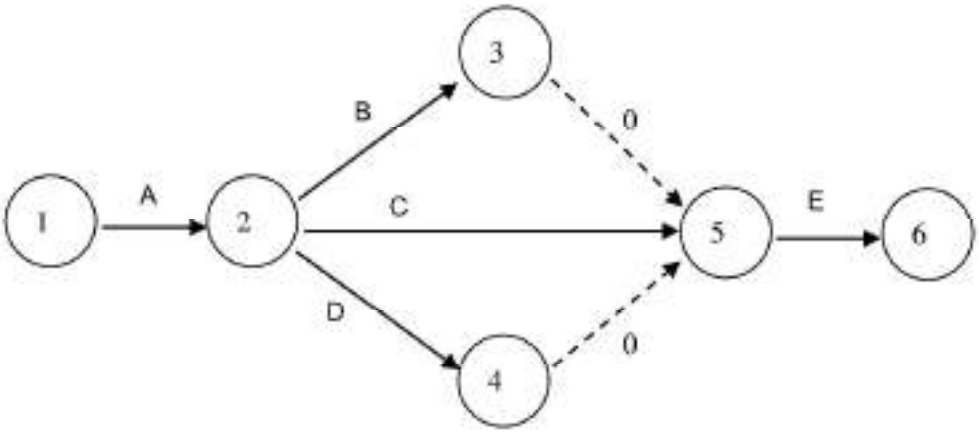
العلاقات Relationships

1. A, the first activity of the project.
2. A, precedes B, C & D.
3. B, C & D precede E.

يفضل أعادة ترتيب الأنشطة في الجدول المجاور ⇒

Activity	Pre. Act.
A	----
B	A
C	A
D	A
E	B, C, D

الحل: بالاعتماد على جدول الأسبقيات أعلاه يتم رسم شبكة الأعمال بالشكل الآتي:



٥-٣ أنواع نماذج شبكات الأعمال Types of Networks Models[١] [٢] [٣]

تنقسم نماذج شبكات الأعمال إلى الأنواع الرئيسية الآتية:

١. نموذج أقصر طريق Shortest- Route Model: يستخدم هذا النموذج عند الرغبة في تحديد أقصر طريق بين نقطتين في شبكة الأعمال.
٢. نموذج أقصى تدفق Maximum-Flow Model: ويستخدم هذا النموذج لتحقيق أقصى تدفق يُمكن أن تحققهُ شبكة الأعمال.
٣. نماذج شبكات أعمال الأنشطة Activity Network Models: وتهدف هذهِ النماذج إلى تحديد الأنشطة المتتابعة والمتوازية وتحديد وقت كل نشاط والتعرف على المسار أو المسارات الحرجة، ومن أهم هذهِ النماذج:
   - طريقة المسار الحرج (CPM)(Critical Path Method).
   - أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها (Program Evaluation And Review Technique) (PERT).

وسيتناول هذا الفصل بشي من التفصيل في الجزء المتبقي منه طريقتي (CPM) و (PERT)، حيث أنهما أسلوبان تستخدمهما الإدارة في التحليل والتخطيط ويعتمدان على خرائط التحليل الشبكي (Analysis Networks) التي توضح مراحل تنفيذ المشروع وجدولة العمليات المختلفة وتحليلها لتحقيق الرقابة التامة على استخدام الموارد المختلفة وخاصة العمال والمواد الأولية وغيرها من المستلزمات.

---

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 275.

(٢) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ٩٦.

(3) Gerd Finke, **Op. Cit.**, p. 108.

قبل استخدام هذهِ الأساليب لم يكن من الممكن تنظيم العمليات المتعددة التي تشتمل عليها المشاريع الكبيرة في خطة متناسقة، وذلك بسبب تعقد هذه الأعمال وتداخلها وعدم أستطاعت العقل البشري تذكر ومتابعة الأعمال المعقدة للمشروع، وكانت نتيجة ذلك تعدد الجهات التي تقوم بتخطيط وتنفيذ العمليات المكونة للمشروع مما ترتب عليه ضعف التنسيق والرقابة، ولكن كل من أسلوب (CPM) و (PERT) يعتبر مدخلاً سليماً لبناء خطة متناسقة للمشروع ككل، حيث تهدف هذه الأساليب إلى مراقبة تنفيذ المشروع أو برنامج معين يتكون من عدة مراحل أو عمليات، وتحديد العمليات التي ينبغي وضعها تحت رقابة مستمرة لأنها قد تسبب تعطيل المشروع ككل، كذلك يجب تحديد المسار الذي ينبغي مراقبته بإستمرار لأن أي تأخير في تنفيذه يؤدي إلى تأخير المشروع بأكملهِ، كذلك تهدف هذهِ الأساليب إلى تحليل وتخطيط ووضع برنامج زمني لعمليات المشروع وتحديد الوقت اللازم لتنفيذ كل جزء ثم وضع خطة التنفيذ النهائية.

٥-٣-١ طريقة المسار الحرج (CPM)[1][2][3]

يعرف المسار الحرج (CPM) بأنه سلسلة من الأنشطة الحرجة التي تربط نقطة البداية والنهاية في التخطيط الشبكي، وسميت بالأنشطة الحرجة لأن الوقت الفائض في تنفيذها يساوي صفر، لذلك فأن أي تأخير فيها يؤدي إلى تأخير تنفيذ المشروع الكلي.

---

(1) Hamdy A. Taha, (2007), **Op. Cit.**, p. 282.

(2) A. Ravi Ravindran, (2009), 'Operations Research: Applications', CRC Press, Taylor & Francis Group, USA, p. 21.

(3) Pinedo, Michael L., **Op. Cit.**, p. 54.

تتضمن حسابات المسار الحرج تطبيق نوعين من الحسابات:

أولاً: الحسابات المتقدمة (Forward Pass Calculation) حيث نبدأ من أول نقطة إلى أخر نقطة زمنية في المخطط الشبكي، حيث يمثل هذا الرقم المحسوب وقت الإبتداء المبكر لتلك الأنشطة التي تبدأ بالحدث (ES_i) (Earliest Start Time) حيث نفرض ($ES_i = 0$) الذي يمثل بداية الحسابات ونرمز له ($\square_i$)، ونستخرج وقت الأنتهاء المبكر (EC_j) (Earliest Completing Time) لحدث نهاية النشاط (i , j) حيث ($i < j$) ونرمز له ($\square_j$) حسب القاعدة الأتية:

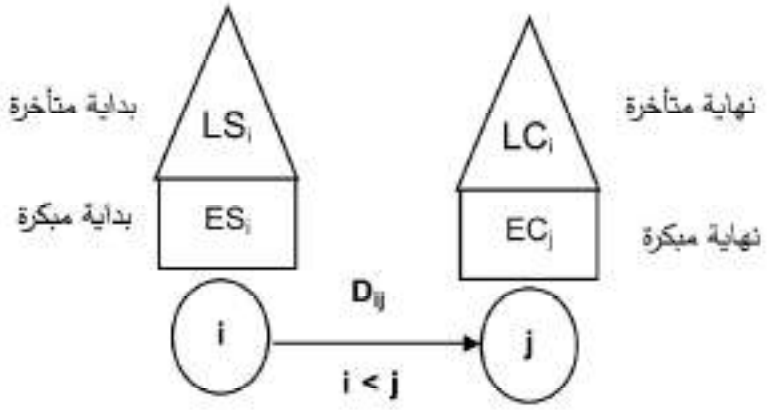
$$EC_j = Max_i(ES_i + D_{ij}) \quad \forall i,j$$

حيث D_{ij} يمثل بداية وقت تنفيذ النشاط (i , j) مقدر بالساعات أو الأيام أو أية وحده زمنية أخرى.

ثانياً: حسابات وقت الإنتهاء المتأخر (LC_i) (Latest Completing Time) لكافة الأنشطة المؤدية للحدث i فإذا كانت ($i = n$) تمثل الحدث الأخير للمشروع فإن ($LC_n = EC_n$) حيث يمثل بداية الحسابات المتأخرة ونرمز له ($\triangle_j$) ونطبق القاعدة التالية لحساب وقت الإبتداء المتأخر (LS_i) (Latest Starting Time):

$$LS_i = Min_j(LC_j - D_{ij}) \quad \forall i,j$$

مُلاحظة (٥-١): يُمثل وقت الإنتهاء المتأخر أكبر عدد من الأيام أو الأسابيع (أو أية وحده زمنية) يُمكن أن يقضى بين أول حدث في الشبكة وأي حدث يكون موضع سؤال دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير توقيت أتمام المشروع الكلي، كما في شكل (٥-٦) الآتي:



شكل (٥-٦) يوضح رموز المعاملات المستخدمة لحساب الأوقات المبكرة والمتأخرة

مثال (٥-٥): ترغب وزارة الدفاع بإنتاج نوع من صواريخ أرض جو مضاد للطائرات المهاجمة على إرتفاعات منخفضة مثل طائرات الهليكوبتر، تمر عملية تصنيع الصاروخ عبر عدة مراحل (أنشطة) كل منها يتطلب زمناً معيناً وتكلفة معينة، وكمثال على ذلك لنفرض أن البيانات على النحو الموضح بالجدول الآتي:

رمز النشاط	أسم النشاط Activity	الأنشطة التي تسبق النشاط الحالي Precedes	مدة تنفيذ النشاط (أسبوع)
A	تصميم وتطوير أجهزة الإرسال	-	15
B	تصميم الهيكل الخارجي	-	20
C	تصميم الأجهزة الميكانيكية	-	15
D	تصميم الرافعة	-	10
E	تصميم وتطوير أجهزة الاستقبال	A	15
F	تصميم أجهزة الفحص الذاتي	B	15
G	تصميم أجهزة التتبع الحراري	C	10
H	تصميم الكوابل والتوصيلات الداخلية	A	5
I	تصميم موانع التشويش وأجهزة ضبط المسار	E , F	10
J	تصميم الرأس والعبوة المتفجرة	D , G , H	10
K	الاختبار والإخراج النهائي	I , J	10

المطلوب: إيجاد الزمن اللازم لإنهاء تنفيذ مشروع إنتاج الصواريخ وتحديد المسار الحرج للتنفيذ، وذلك لتحقيق أهداف المصنع العسكري مستخدماً طريقة المسار الحرج (CPM).

الحل: يتم رسم شبكة الأعمال الخاصة بالمسألة أعلاه مع مراعاة الأسبقيات المشار إليها في جدول الأنشطة، بعد ذلك يتم البدء بإجراء الحسابات المتقدمة بالشكل الآتي:

$ES_i = 0$, if $i = 1$, then $ES_1 = 0$

يتم اكمال الحسابات المتقدمة لبقية الأنشطة بالأعتماد على القانون الآتي ووضعها داخل المربع ☐:

$$EC_j = Max_i(ES_i + D_{ij}) \quad \forall\, i,j$$

$$EC_2\,(\square_2) = ES_1\,(\square_1) + D_{12} = 0 + 20 = 20$$

$$EC_3\,(\square_3) = ES_1\,(\square_1) + D_{13} = 0 + 15 = 15$$

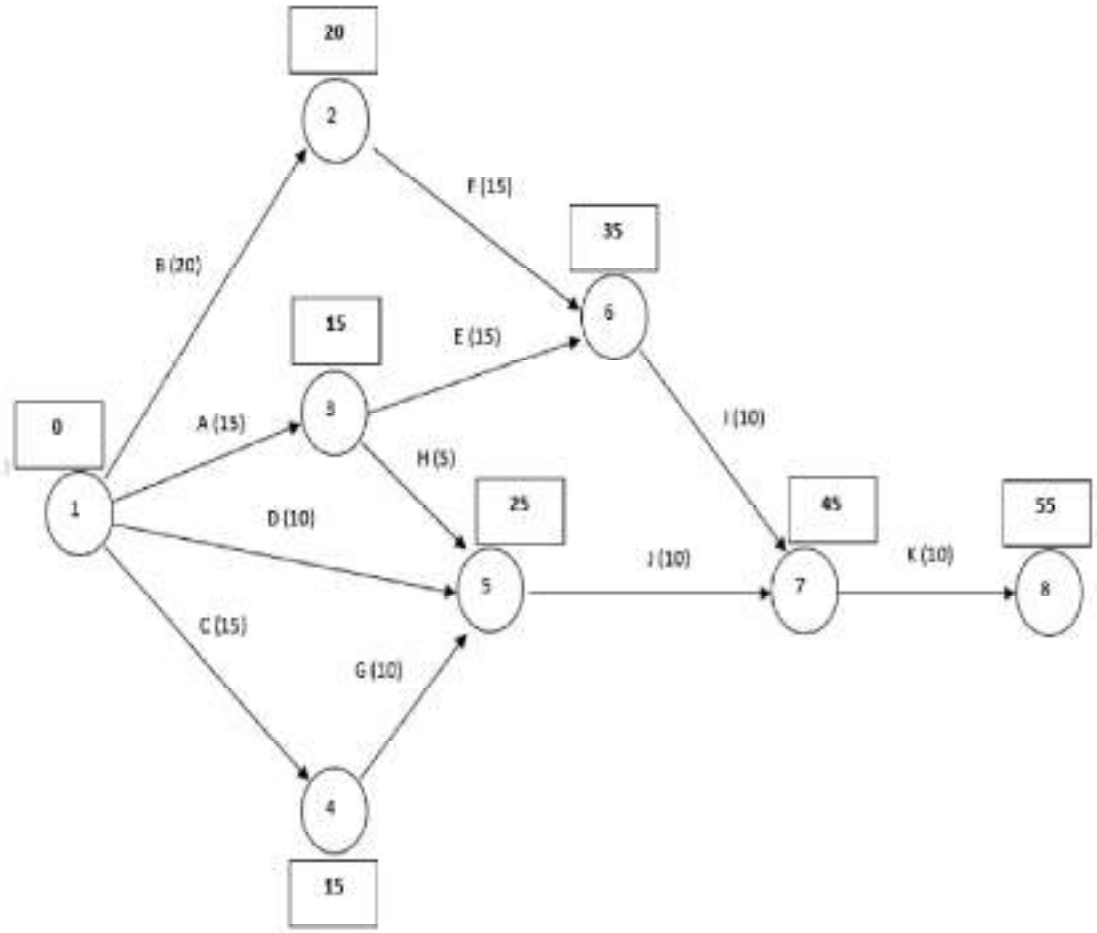
$$EC_4\,(\square_4) = ES_1\,(\square_1) + D_{14} = 0 + 15 = 15$$

$$EC_5 = \max_{i=1,3,4}(ES_i + D_{i5}) = Max\,(\square_1 + D_{15}, \square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45})$$
$$= Max(0+10, 15+5, 15+10) = Max(10,20,25) = 25$$

$$EC_6 = \max_{i=2,3}(ES_i + D_{i6}) = Max\,(\square_2 + D_{26}, \square_3 + D_{36})$$
$$= Max(20+15, 15+15) = Max(35,30) = 35$$

$$EC_7 = \max_{i=5,6}(ES_i + D_{i7}) = Max\,(\square_5 + D_{57}, \square_6 + D_{67})$$
$$= Max(25+10, 35+10) = Max(35,45) = 45$$

$$EC_8\,(\square_8) = ES_7\,(\square_7) + D_{78} = 45 + 10 = 55$$



بعد أكتمال الحسابات المتقدمة ووضعها داخل المربع، يتم البدء بإجراء حسابات وقت الإنتهاء المتأخر حيثُ أن ($LC_8 = EC_8 = 55$) ونضعها داخل المثلث△ ولبقية الأنشطة نطبق القاعدة الآتية:

$$LS_i = Min_j(LC_j - D_{ij}) \quad \forall\, i,j$$

$$LS_7(\triangle_7) = LC_8(\triangle_8) - D_{78} = 55 - 10 = 45$$

$LS_6(\triangle_6) = LC_7(\triangle_7) - D_{67} = 45 - 10 = 35$

$LS_5(\triangle_5) = LC_7(\triangle_7) - D_{57} = 45 - 10 = 35$

$LS_4(\triangle_4) = LC_5(\triangle_5) - D_{45} = 35 - 10 = 25$

$$LS_3 = \underset{j=5,6}{Min}(LC_j - D_{3j}) = Min(LC_5 - D_{35}, LC_6 - D_{36})$$
$$= Min(35-5, 35-15) = Min(30,20) = 20$$

$LS_2(\triangle_i) = LC_6(\triangle_i) - D_{26} = 35 - 15 = 20$

$$LS_1 = \underset{j=2,3,4,5}{Min}(LC_j - D_{1j})$$
$$= Min(LC_2 - D_{12}, LC_3 - D_{13}, LC_4 - D_{14}, LC_5 - D_{15})$$
$$= Min(20-20, 20-15, 25-15, 35-10)$$
$$= Min(0,5,10,25) = 0$$

بعد أكتمال حسابات وقت الإنتهاء المتأخر ووضعها داخل المثلث، يتم البدء بتحديد الأنشطة الحرجة وذلك بتطبيق الشروط الثلاث الآتية:

1. $ES_i(\square_i) = LS_i(\triangle_i)$
2. $EC_i(\square_j) = LC_i(\triangle_j)$
3. $EC_j(\square_j) - ES_i(\square_i) = LC_j(\triangle_j) - LS_i(\triangle_i) = D_{ij}$

نطبق الشروط الثلاثة أعلاه على جميع أنشطة المشروع ونُلاحظ أن ذلك ينطبق على الأنشطة B و F و I و K، حيثُ تسمى هذهِ الأنشطة بالأنشطة الحرجة ونضع العلامة (||) على الخطوط المُمثلة لتلك الأنشطة للدلالة على أنها حرجة، المثال الآتي هو تطبيق للشروط أعلاه للنشاط F:

1. $ES_2 = LS_2 = 20$
2. $EC_6 = LC_6 = 35$
3. $EC_6 - ES_2 = LC_6 - LS_2 = 35 - 20 = 15 = D_{26}$

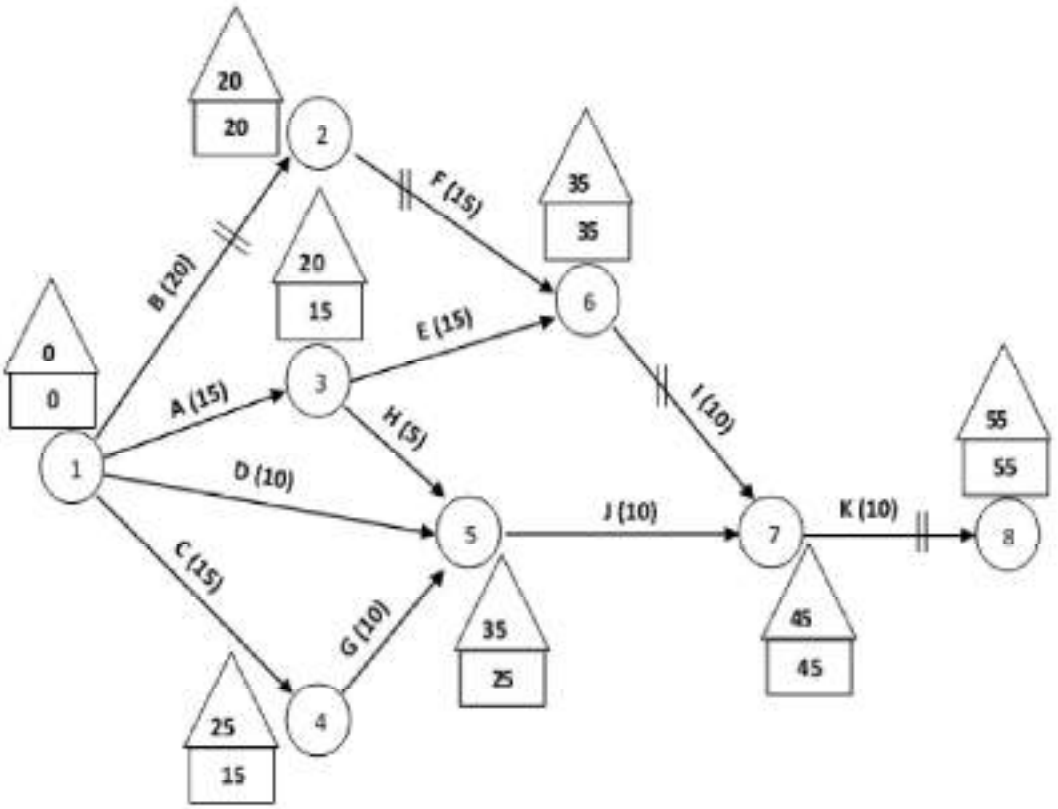
وبالتالي نكتب أنشطة المسار الحرج بأحدى الصيغ الآتية:

The critical path: (1–2) , (2–6) , (6–7) , (7–8)

Alternatively, the critical path: (1 – 2 – 6 – 7 – 8)

The minimum time to finished the project = 55 weeks

أما شبكة الأعمال بصيغتها النهائية والتي تتضمن جميع أنواع الحسابات المتقدمة والمتأخرة فهي بالشكل الآتي:

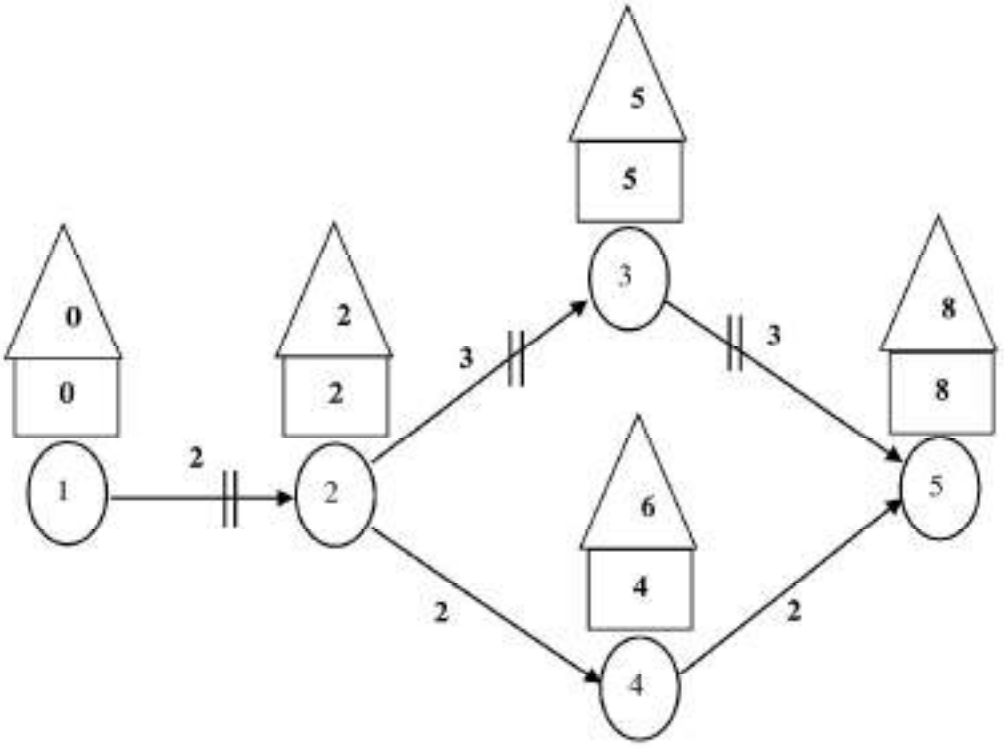


مثال (٥-٦): إذا كانت لديك البيانات الخاصة بشبكة الأعمال التالية، أوجد المسار الحرج لها والوقت اللازم لإنجاز المشروع بشكله النهائي؟

Activity	1 – 2	2 – 3	2 – 4	3 – 5	4 – 5
Time (days)	2	3	2	3	2

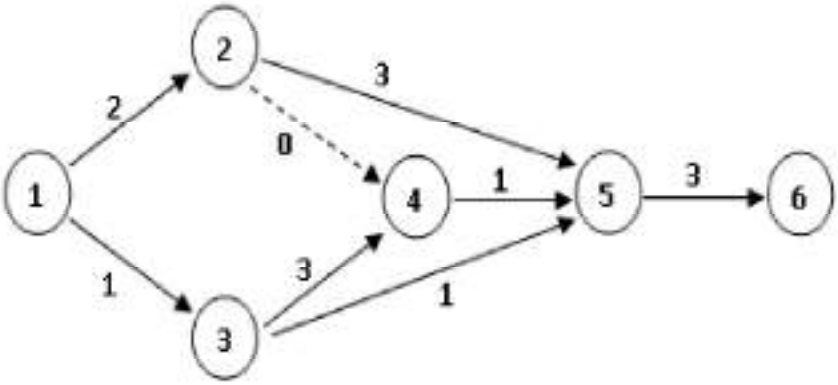
الحل:

يتم رسم شبكة الأعمال ومن ثم يتم استخراج المسار الحرج لها كما يأتي:

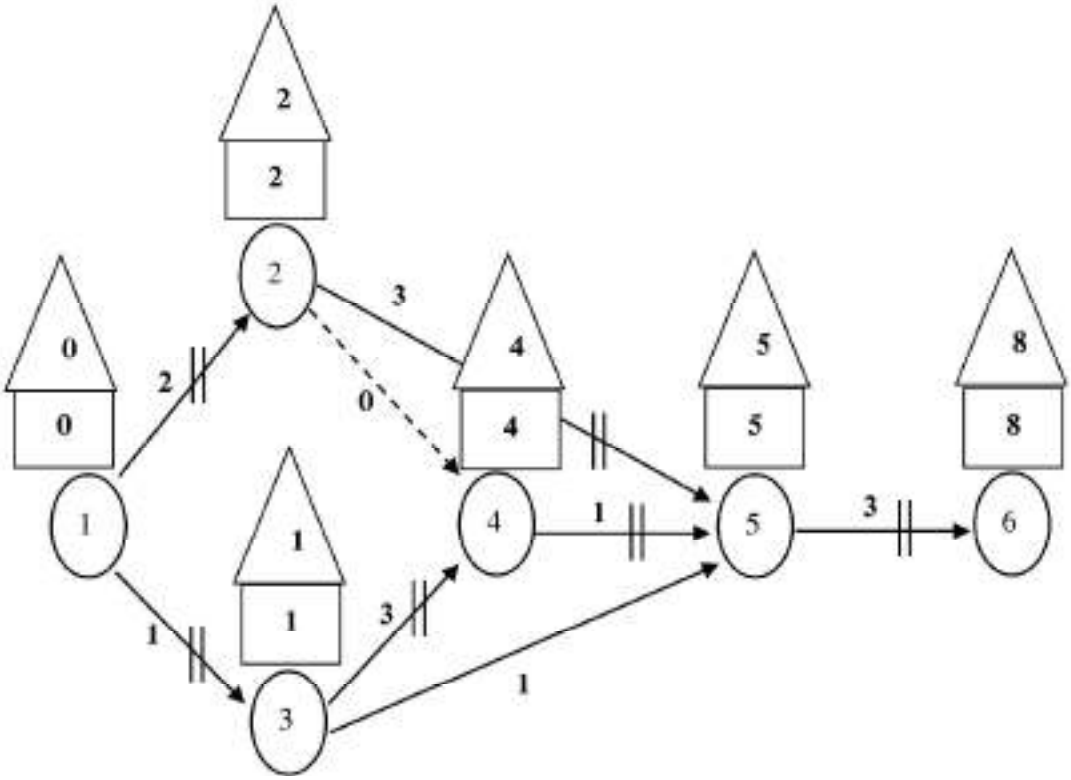


C.P.: (1 – 2 – 3 – 5), and time = 8 days

مثال (٥-٧): إذا كانت لديك شبكة الأعمال التالية، أوجد المسار الحرج لها والوقت اللازم لإنجاز المشروع بشكله النهائي؟



الحل: يتم أعادة رسم شبكة الأعمال أعلاه ومن ثم يتم استخراج المسار الحرج لها كما يأتي:



من المخطط الشبكي نُلاحظ أن لدينا مسارين حرجة هما:

C.P.**1**: (1 – 2 – 5 – 6), and C.P.**2**: (1 – 3 – 4 – 5 – 6)

Time = 8 time units

من أعلاه نُلاحظ أنه لدينا مسارين حرجين كلاهما يتم بـ(8) أيام، وهذا يعني أن أي تأخير في أحد أنشطة هذين المسارين سوف يؤدي إلى تأخير الأنشطة اللاحقة لها وبالتالي سوف يتأخر المشروع عن موعده الأمثل وهو (8) أيام.

٥-٣-٢ أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها (PERT)[١] [٢]

تنقسم العمليات المكونة للمشروع إلى نوعين:

- **العمليات المتكررة:** وهي التي تحدث بتغير بسيط أو بدون تغيير مثل إنتاج السيارات في خط تجميع يعتبر مثال العمل المتكرر، بهذا تمتلك الإدارة المعلومات الكافية التي تتضمن التكاليف والكميات والوقت المتعلق بكل مرحلة، أو غيرها من البيانات التي تساعدها لاستخدام طريقة المسار الحرج لتحليل المشاريع واستخراج مدة التنفيذ.
- **العمليات غير المتكررة:** وهي التي لم تحدث من قبل بنفس الطريقة وتشمل الأبحاث والتطوير حيث تنفذ معظم الأنشطة مرة واحدة، لذلك لا تتوفر معلومات سابقة يمكن الاعتماد عليها.

---

(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٢٨.

(2) Pinedo, Michael L., **Op. Cit.**, p. 58.

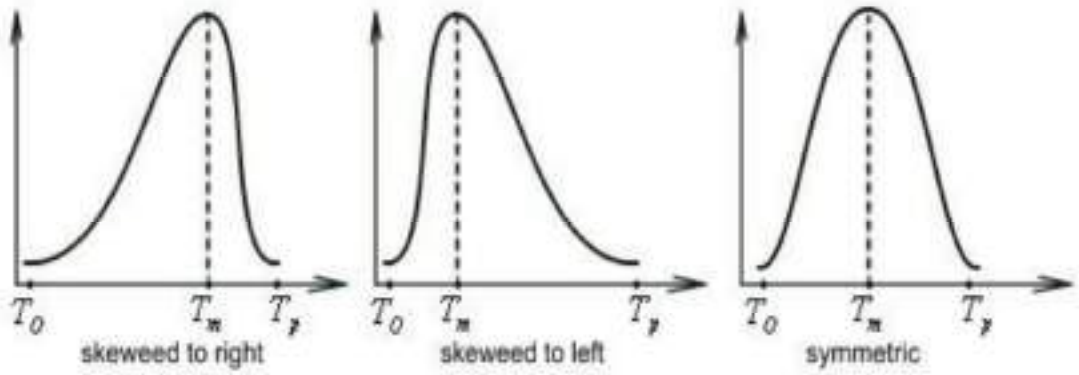
وعلى ذلك، يُمكن القول أنه إذا كانت العمليات أو المشاريع تتكرر مرة بعد أخرى فإن الأدارة يكون لديها الخبرة والبيانات المتعلقة بالأوقات اللازمة لإنجاز تلك العمليات والموارد المادية والبشرية لتلك العمليات التي تتضمنها هذهِ المشاريع، في هذهِ الحالة يُمكن الأستعانة بأسلوب المسار الحرج (CPM) لتخطيط مثل هذا النوع من المشاريع والرقابة عليها.

أما بالنسبة للعمليات والمشاريع غير المتكررة أو التي لم تحدث من قبل، ولا يُوجد لدى الأدارة خبرة مسبقة بها فإنه يفضل أستخدام أسلوب بيرت (PERT) في التخطيط والرقابة نظراً لظروف عدم التأكد المحيطة بها، ولهذا يفترض أسلوب بيرت ثلاث تقديرات زمنية لكل نشاط من أنشطة المشروع وهي:

- الزمن الطبيعي (T_m) Most Likely Time: وهو التقدير الأفضل للفترة الزمنية المُمكنة لإنجاز النشاط في ظل الظروف الطبيعية.
- الزمن التفاؤلي (T_o) Optimistic Time: وهو التقدير لأقصر فترة زمنية لإنجاز النشاط في ظل الظروف الطبيعية.
- الزمن التشاؤمي (T_p) Pessimistic Time: وهو التقدير لأطول فترة زمنية مطلوبة في ظل الظروف غير الطبيعية مثل عطل المكائن المفاجئ، مشاكل العمال، عجز الموارد المخزونة، تأخر أستلام الموارد وغيرها من الأسباب.

ومن خلال هذهِ التقديرات الزمنية للأنشطة يقوم أسلوب بيرت بحساب الوقت المتوقع لكل نشاط من أنشطة المشروع، وبالتالي الوقت المتوقع لإتمام المشروع ككل، ونُلاحظ في معظم تحليلات بيرت أن التقديرات الثلاثة تتبع توزيع (Beta) الذي يأخذ

أحد الأشكال البيانية التالية، والذي تكون نقطة تحدبه الوحيدة عند النقطة التي تمثل متوسط التقديرات الثلاث ونهايتهِ عند التقديرين T_o ، T_p كما هو موضح في شكل (٥-٧) الآتي:



شكل (٥-٧) يوضح الأشكال الاحتمالية لأوقات تنفيذ أنشطة المشروع

ثم نستخدم المعادلة التالية لحساب متوسط الوقت ((Mean (μ)) لتنفيذ كل نشاط وهي:

$$\mu = \frac{T_o + 4T_m + T_p}{6}$$

وكذلك حساب التباين ((Variance (σ^2)) وهو مربع الإنحراف المعياري (σ) (Standard Deviation) لكل نشاط بتطبيق المعادلة الآتية:

$$\sigma^2 = \left(\frac{T_p - T_o}{6}\right)^2$$

ويمكن تلخيص خطوات التحليل باستخدام أسلوب (PERT):

- نرسم المخطط الشبكي للمشروع ونعتمد على التقديرات الثلاث (T_o ، T_m ، T_p) في حساب متوسط الوقت المتوقع (μ_i) لتنفيذ كل نشاط.
- نعتمد على قيمة (μ_i) المستخرجة لحساب الوقت واستخراج المسار الحرج.
- يحسب وقت المشروع الكلي والذي سنرمز له برمز E(T) (Expected Time) وهو الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع الكلي بأعتباره يساوي مجموعة الأوقات الحرجة، وكذلك التباين الكلي V(T) (Variance) لحساب احتمال إنجاز المشروع في أية وحده زمنية مقترحة من قبل الجهة المسؤولة عن التنفيذ.

ومن المعلوم أن الإنحراف المعياري لأي توزيع هو مقياس لاختلاف قيم التوزيع، أما في شبكات الأعمال فأن الإنحراف المعياري يشير إلى إختلافات الوقت، والتي من الممكن توقعها في أتمام الأنشطة الفردية أو أجزاء المشروع أو في إتمام المشروع الكلي.

مثال (٥-٨): أوجد وقت إنجاز المشروع الكلي والتباين باستخدام أسلوب بيرت لأنشطة المشروع الآتي:

Activity	Prec. Act.	T_o	T_m	T_p	μ	σ^2
A	--	2	5	8	5	1*
B	A	6	9	12	9	1*
C	A	5	14	17	13	4
D	B	5	8	11	8	1*
E	C,D	3	6	9	6	1*
F	--	3	12	21	12	9
G	E,F	1	4	7	4	1*

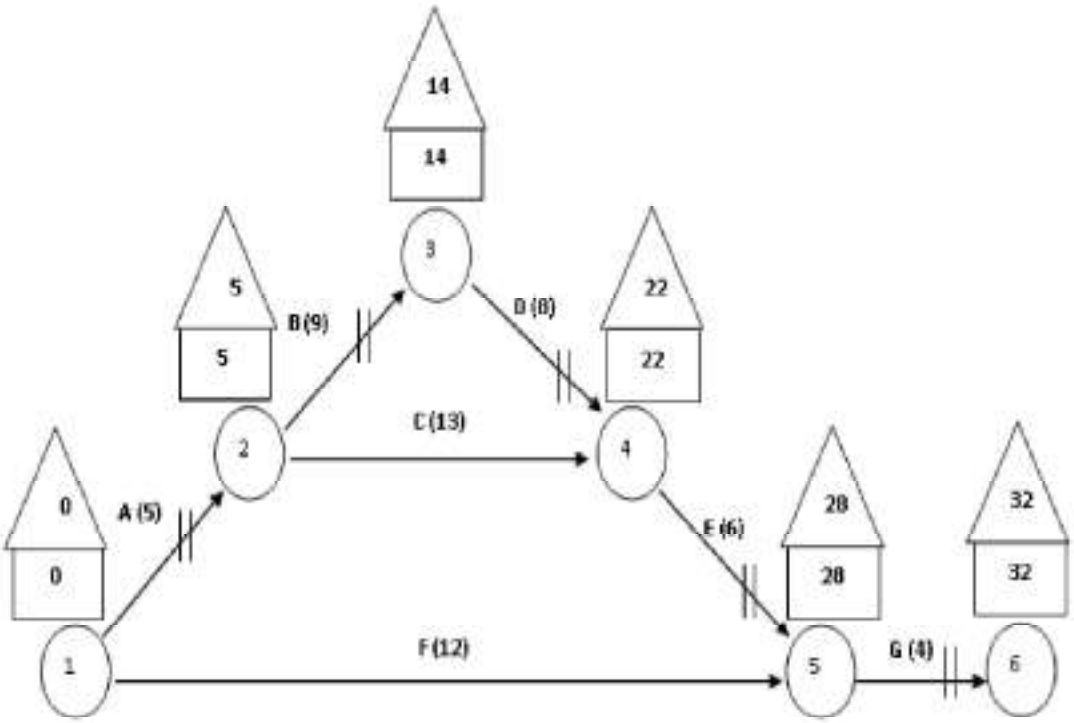
الحل: نعتمد على التقديرات الثلاث (T_o , T_m , T_p) المعطاة في السؤال أعلاه لحساب عمود متوسط الوقت المتوقع (μ_i) وعمود التباين (σ^2) في الجدول أعلاه، وسيتم حساب ذلك لبعض الأنشطة كما يأتي:

$$\text{Activity (A)} \rightarrow \mu = \frac{2+4(5)+8}{6} = 5, and \quad \sigma^2 = (\frac{8-2}{6})^2 = 1$$

$$\text{Activity (B)} \rightarrow \mu = \frac{6+4(9)+12}{6} = 9, and \quad \sigma^2 = (\frac{12-6}{6})^2 = 1$$

$$\text{Activity (C)} \rightarrow \mu = \frac{5+4(14)+17}{6} = 13, and \quad \sigma^2 = (\frac{17-5}{6})^2 = 4$$

يتم وضع القيم المحسوبة لمتوسط الوقت المتوقع (μ_i) على شبكة الأعمال الخاصة بأنشطة المسألة ومن ثم نستخرج المسار الحرج، كما يأتي:



أما المسار الحرج والمدة المتوقعة لإنجاز المشروع الكلي والتباين الكلي فهي:

The Critical Path is: (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6).

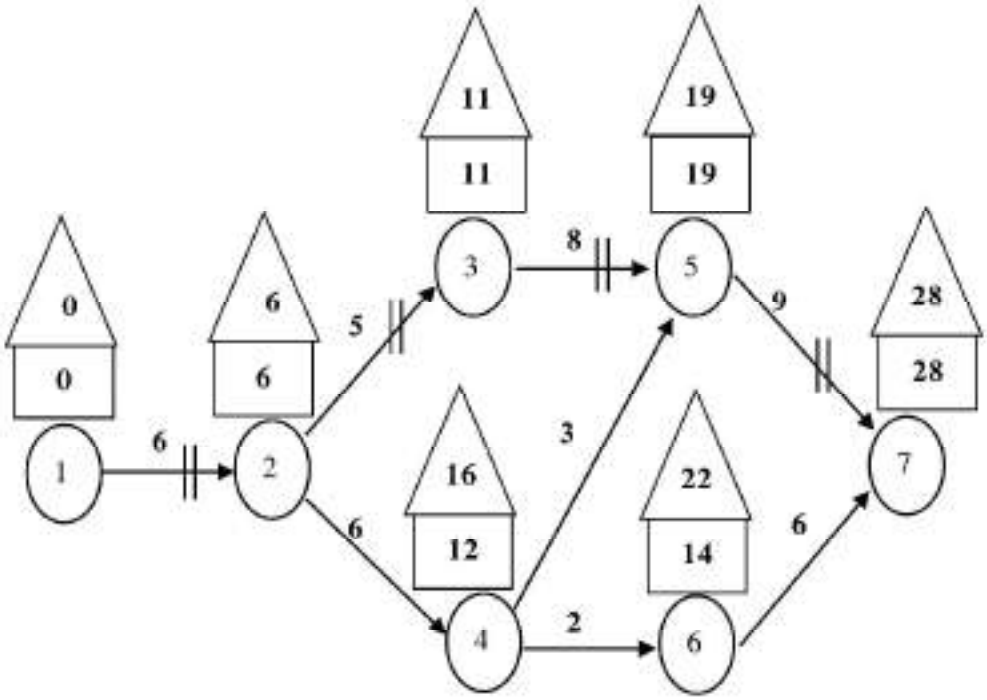
E(T) = 5 + 9 + 8 + 6 + 4 = 32 days.

V(T) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 .

مثال (٥-٩): أوجد وقت إنجاز المشروع الكلي والتباين باستخدام أسلوب بيرت لأنشطة المشروع الآتي:

Activity	T_o	T_m	T_p	μ	σ^2
1-2	4	6	8	6	0.666*
2-3	2	5	8	5	1*
2-4	3	5	13	6	1.666
3-5	5	8	11	8	1*
4-5	2	3	4	3	0.333
4-6	1	2	3	2	0.333
5-7	6	9	12	9	1*
6-7	4	6	8	6	0.666

الحل: نعتمد على التقديرات الثلاث (T_o , T_m , T_p) المعطاة في السؤال أعلاه (مقاسة بالأسابيع) لحساب عمود متوسط الوقت المتوقع (μ_i) والتباين (σ^2)، ويتم وضع القيم المحسوبة لمتوسط الوقت المتوقع (μ_i) على شبكة الأعمال الخاصة بأنشطة المسألة ومن ثم نستخرج المسار الحرج، كما يأتي:



The Critical Path is: (1 – 2 – 3 – 5 – 7).

E(T) = 6 + 5 + 8 + 9 = 28 weeks, and V(T) = 0.666 + 1 + 1 + 1 = 3.666.

بالنسبة للأنشطة غير الحرجة مثل النشاط (4-2) نُلاحظ أن الفرق بين أقرب وقت متوقع لإنجازه (الوقت المبكر الذي يساوي 12 أسبوع) وبين أخر وقت مسموح به لإتمام أنجاز هذا النشاط (16 أسبوع) هو 4 أسابيع، وهذا يعني بالأمكان أن نبدأ بتنفيذ النشاط (4-2) بعد مرور 10 أسابيع على بدء العمل في المشروع دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير توقيت المشروع الكلي، فإذا بدء هذا النشاط بالأسبوع 10 وأستمر 6 أسابيع لإجل إنجازه، لإنتهى في الوقت المحدد وهو 16 أسبوع، كذلك الأمر بالنسبة للنشاط (6-4) حيثُ يُمكن تأخير إنجازه مدة 8 أسابيع بسبب وجود الوقت الفائض أي (22-14=8) أسابيع، أما بالنسبة للأنشطة التي يكون الوقت الفائض فيها صفر فيجب

أن تتم حسب التوقيت الموضوع لها وبخلافهِ لن يتم إتمام المشروع في المدة المحددة وهي 28 أسبوعاً، ولهذا تدعى هذهِ الأنشطة بالحرجة.

مُلاحظة (٥-٢): من الأشياء التي تقع لدى تنفيذ المشاريع حصول تأخير في تنفيذ واحد أو أكثر من الأنشطة الحرجة مما ينتج عنها تأخير في تنفيذ المشروع كاملاً بمقدار التأخير الذي حدث في الأنشطة، ويتم في مثل هذه الحالات اللجوء إلى الأوقات المرنة على الأنشطة غير الحرجة والتي تمكننا من تأجيل تنفيذ بعض من هذه الأنشطة وقتاً يتوقف مع أوقاتها المرنة، مما يؤدي مثل هذا التأجيل بشكل عام توفير أجزاء من الموارد المخصصة للأنشطة غير الحرجة كتوفير بعض القوى العاملة والمعدات والأجهزة، ويمكن عندها تحويل التوفير الحاصل من هذه الموارد إلى الأنشطة الحرجة للمساعدة في مسارعة تنفيذها، بالإضافة إلى الاستفادة من هذه العمليات في تحويل الموارد فأنه يمكن لإدارة المشروع أيضاً أن تُغير في شروط المشروع لتجنب الوقوع في التأخير.

مُلاحظة (٥-٣): يُمكن حساب أحتمال أكمال المشروع في وقت مُعين قبل وقت إنجازهِ الفعلي أو بعده بمدة معينة، ولإجراء ذلك نحسب قيمة (Z) وهي قيمة التوزيع الطبيعي المعياري:

$$Z = \frac{\bar{X} - E(T)}{\sqrt{\sum \delta^2}}$$

حيثُ $\bar{X}$ يُمثل وقت مُعين لإكمال المشروع المطلوب حساب الأحتمال لهُ

E(T) الزمن الفعلي لإنهاء المشروع (مجموع أوقات الأنشطة الحرجة)

$\sum \delta^2$ مجموع تباينات الأنشطة الحرجة للمشروع

بالرجوع إلى مثال (٥-٩) السابق، والذي تم إنجاز المشروع فيه بزمن E(T)=28 أسبوع وتباين V(T)=3.666، فأن أحتمال إنجاز المشروع بزمن 30 أسبوع هو:

$$Z = \frac{\bar{X} - E(T)}{\sqrt{\sum \delta^2}} = \frac{30 - 28}{\sqrt{3.666}} = 1.045$$

إن الاحتمال المقابل للقيمة (Z=1.045) في جدول التوزيع الطبيعي هو (0.8531)، أي أن احتمال أن يحتاج المشروع إلى وقت مدتهِ (30) أسبوع لإكمالهِ هو (85%).

٥-٤ جدولة أوقات المشروع Network's Time Schedule[1][2]

هناك عنصرين مهمين في شبكات الأعمال هما الحدث (Event) والنشاط (Activity) حيث إن الحدث يمثل النقطة المعينة من الزمن بينما النشاط هو الوقت المفترض لذلك الحدث، من هذا نستنتج أن تقنية شبكات الأعمال التي تهتم بالحدث

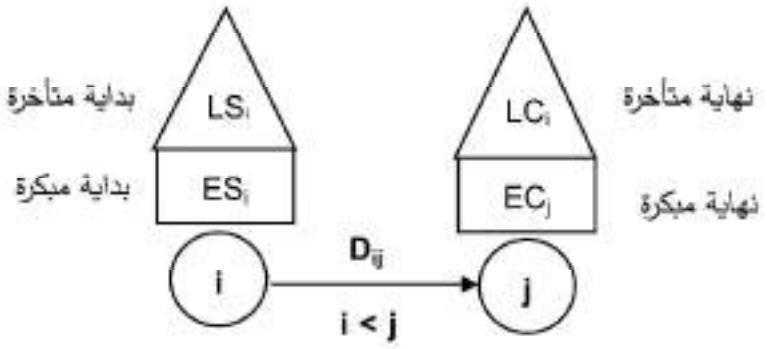
(١) صابر، جمال عبد العزيز، **مصدر سبق ذكره**، ص ١٤٥.

(2) A. Ravi Ravindran, **Op. Cit.**, p. 24.

هي (PERT) أما التقنية التي تهتم بالنشاط فهي (CPM)، حيث الأخيرة لا تهتم بالاحتمالية التي تطرأ على أوقات تنفيذ المشروع وكذلك تفرض وجود علاقة بين الوقت والكلفة، وفي الآونة الأخيرة أصبحت هذه التقنيات أسلوب واحد لجدولة أوقات المشروع.

يستخدم المصطلح (Slack time) في مخططات (PERT) والمصطلح (Float time) في مخططات (CPM)، وكلاهما يدل على الوقت الفائض (قد يكون موجب أو سالب أو صفر) الخاص بالحدث أو النشاط والذي يستطيع التعطل خلاله بدون التأثير على وقت جدولة المشروع، أن معرفة الأوقات المرنة تساعد متخذي القرار لمعرفة المرونة في جدولة المشروع ولتحديد أي من الموارد يمكن استخدامها في أنشطة أخرى، حيث يتم نقل الموارد من الأنشطة غير الحرجة الى الأنشطة الحرجة وذلك لتقليل فترة المشروع والمحافظة على كلف الأنشطة.

يُمكن الأستفادة من شكل (٥-٦) السابق لتوضيح الرموز التي نحتاجها لحساب أوقات جدولة المشروع وكما يأتي:



الشكل أعلاه يساعد في كيفية حساب جدولة الأوقات حيث أن ($\square_i$) ES_i يُمثل البداية المبكرة، و($\triangle_j$) LC_j يُمثل النهاية المتأخرة للنشاط (ij) وكلاهما يستخرج من المخطط الشبكي مباشرة (أو بالاعتماد على القوانين الخاصة بهما).

يتم حساب EC_j الذي يُمثل النهاية المبكرة من قانونهِ السابق بالشكل الآتي:

$$EC_j = Max_i(ES_i\ (\square i) + D_{ij}) \quad \forall i,j$$

ويتم حساب LS_i الذي يُمثل البداية المتأخرة من قانونهِ السابق بالشكل الآتي:

$$LS_i = Min_j(LC_j - D_{ij}) \quad \forall i,j$$

أما الوقت الراكد الكلي للنشاط (Total Float time) TF_{ij} فهو الحد الأقصى لمقدار التأخير في إتمام النشاط دون أن يؤثر ذلك على الموعد المحدد لإتمام المشروع وعلى المسار الحرج، ويحسب من الفرق بين أكثر وقت متاح لإنجاز النشاط وبين وقت إنجاز النشاط D_{ij} كما يأتي:

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij} = \triangle_j - \square_i - D_{ij}$$

يُشير الوقت الراكد الحر (المرن) (Free Float time) FF_{ij} للنشاط إلى مقدار التأخير المُمكن في إتمام النشاط، إذا بدأ النشاط في وقتهِ المبكر وبدأت الأنشطة اللاحقة لهذا النشاط في أوقاتها المبكرة، ويحسب من القانون الآتي:

$$FF_{ij} = EC_j - ES_i - D_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

ويُشير الوقت الراكد المستقل (Independent Float time) IF_{ij} للنشاط إلى مقدار التأخير المُمكن بالنسبة للنشاط، إذا كانت كل الأنشطة السابقة للنشاط تبدأ

متأخرة بقدر ما يُمكن، في حين أن كل الأنشطة اللاحقة لهذا النشاط تبدأ في أوقاتها المبكرة، ويحسب من القانون الآتي:

$$IF_{ij} - EC_j - LS_i - D_{ij} - \square_j - \triangle_i - D_{ij}$$

وفي حالة الحصول على قيمة سالبة للوقت الراكد المستقل لأي نشاط فإننا نفترض تلك القيمة صفراً، وتتمثل أهمية حساب الوقت الراكد الحر في أنه يدفع الوقت الراكد الكلي المرتبط بسلسلة الأنشطة غير الحرجة المتعاقبة (المتتالية) إلى النشاط الأخير في السلسلة، بينما تتمثل أهمية الوقت الراكد المستقل في أنه يرتبط فقط بنشاط وليس بسلسلة مكونة من أثنين أو أكثر من الأنشطة.

مثال (٥-١٠): أفترض أن لدينا البيانات الموضحة بالجدول التالي والخاصة بمشروع معين:

Activity	Precede Act.	Time (Days)
A	-	4
B	A	2
C	A	3
D	A	5
E	B	12
F	D	5
G	C , E , F	9
H	D	4
I	B , G , H	3

المطلوب: أرسم شبكة الأعمال الخاصة بهذا المشروع، ثم أوجد المسار الحرج مستخدماً طريقة (CPM)، ثم أحسب الأوقات الراكدة والحرة والمستقلة.

الحل: يتم رسم شبكة الأعمال الخاصة بالمسألة أعلاه مع مراعاة الأسبقيات المشار إليها في جدول الأنشطة، ونضع عليها الأوقات المبكرة والمتأخرة مستخدمين القوانين الخاصة بذلك كما يأتي:

$$EC_j = Max_i(ES_i + D_{ij}) \quad \forall\, i,j$$

$ES_i = 0$, if $i = 1$, then $ES_1 = 0$

EC_2 ($\square_2$)= ES_1 ($\square_1$)+ $D_{12} = 0 + 4 = 4$

EC_3 ($\square_3$)= ES_2 ($\square_2$)+ $D_{23} = 4 + 2 = 6$

ونستمر بحساب بقية قيم الأوقات المبكرة لبقية الأنشطة ونضع هذهِ القيم على المخطط الشبكي كلاً حسب موضعهِ.

بعد أكتمال الحسابات المتقدمة ووضعها داخل المربع، يتم البدء بإجراء حسابات وقت الإنتهاء المتأخر حيثُ أن ($LC_7 = EC_7 = 30$) ونضعها على المخطط الشبكي داخل المثلث△ ولبقية الأنشطة نطبق القاعدة الآتية:

$$LS_i = Min_j(LC_j - D_{ij}) \quad \forall\, i,j$$

LS_6 ($\triangle_6$)= LC_7 ($\triangle_7$) – $D_{67} = 30 - 3 = 27$

LS_5 ($\triangle_5$)= LC_6 ($\triangle_6$) – $D_{56} = 27 - 9 = 18$

ونستمر بحساب بقية قيم وقت الإنتهاء المتأخر لبقية الأنشطة، ويتم البدء بتحديد الأنشطة الحرجة وذلك بتطبيق الشروط الثلاث الآتية:

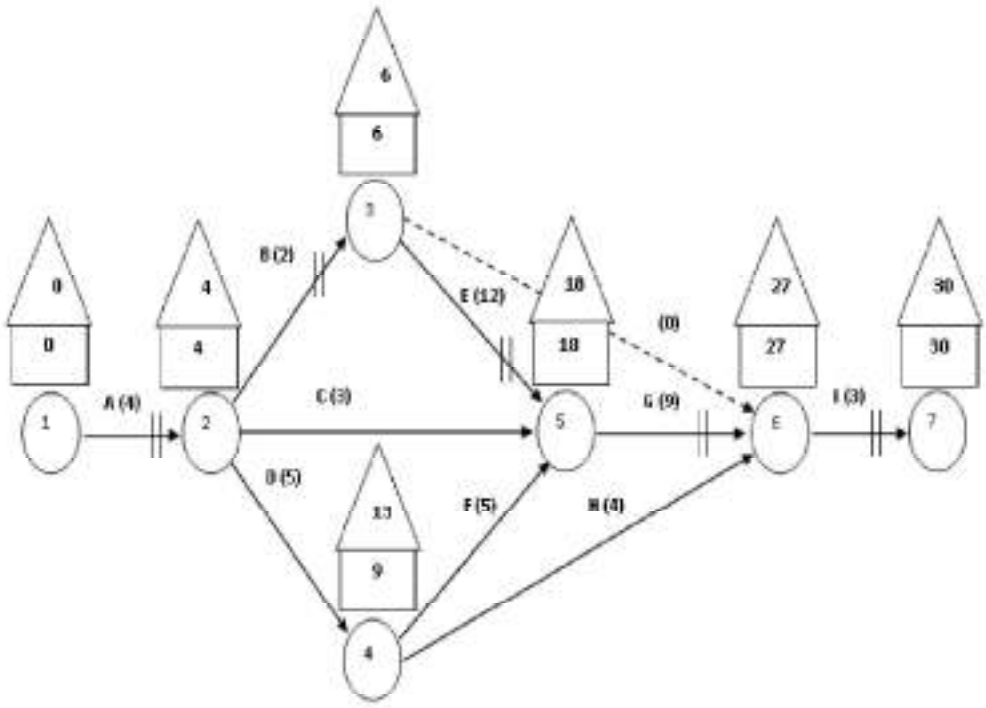
1. ES_i ($\square_i$) = LS_i ($\triangle_i$)
2. EC_j ($\square_j$) = LC_j ($\triangle_j$)
3. EC_j ($\square_j$) – ES_i ($\square_i$) = LC_j ($\triangle_j$) – LS_i ($\triangle_i$) = D_{ij}

وبالتالي فأن المسار الحرج هو:

The C.P.: (1–2–3–5–6–7)

Time = 30 days

أما شبكة الأعمال بصيغتها النهائية والتي تتضمن جميع أنواع الحسابات المتقدمة والمتأخرة فهي بالشكل الآتي:



أما جدول الأوقات الكلية والحرة والمستقلة فيتم حسابها من قوانينها التالية، ومن ثم يتم وضعها في جدول البيانات الأصلية للمسألة كلاً حسب رقم العمود (Column No.)، حيثُ نأخذ بيانات عمود رقم (1) من جدول بيانات المسألة الأصلية المعطاة في السؤال والذي يُمثل (D_{ij})، أما بيانات عمود رقم (2) والتي تُمثل (ES_i) فتأخذ من المخطط الشبكي مباشرة، أما بقية الأعمدة فيتم تكوينها بالشكل الآتي:

$EC_{ij} = ES_i\ (\square_i) + D_{ij} \rightarrow (Col.3) = (Col.2) + (Col.1)$

$EC_{12} = ES_1\ (\square_1) + D_{12} = 0 + 4 = 4$

$EC_{23} = ES_2\ (\square_2) + D_{23} = 4 + 2 = 6$

$EC_{24} = ES_2\ (\square_2) + D_{24} = 4 + 5 = 9, \ldots$

$LS_{ij} = LC_j\ (\triangle_j) - D_{ij} \rightarrow (Col.4) - (Col.5) - (Col.1)$

$LS_{12} = LC_2\ (\triangle_2) - D_{12} = 4 - 4 = 0$

$LS_{23} = LC_3\ (\triangle_3) - D_{23} = 6 - 2 = 4, \ldots$

$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij} = \triangle_j - \square_i - D_{ij} \rightarrow (Col.6) = (Col.5) - (Col.2) - (Col.1)$

$TF_{12} = LC_2 - ES_1 - D_{12} = \triangle_2 - \square_1 - D_{12} = 4 - 0 - 4 = 0$

$TF_{23} = LC_3 - ES_2 - D_{23} = \triangle_3 - \square_2 - D_{23} = 6 - 4 - 2 = 0$

$TF_{24} = LC_4 - ES_2 - D_{24} = \triangle_4 - \square_2 - D_{24} = 13 - 4 - 5 = 4, \ldots$

$FF_{ij} = EC_j - ES_i - D_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij} \rightarrow (Col.7) =$ direct from diagram

$FF_{12} = EC_2 - ES_1 - D_{12} = \square_2 - \square_1 - D_{12} = 4 - 0 - 4 = 0$

$FF_{23} = EC_3 - ES_2 - D_{23} = \square_3 - \square_2 - D_{23} = 6 - 4 - 2 = 0$

$FF_{24} = EC_4 - ES_2 - D_{24} = \square_4 - \square_2 - D_{24} = 9 - 4 - 5 = 0, \ldots$

$IF_{ij} = EC_j - LS_i - D_{ij} = \square_j - \triangle_i - D_{ij}$ → (Col.8) = direct from diagram

$IF_{12} = EC_2 - LS_1 - D_{12} = \square_2 - \triangle_1 - D_{12} = 4 - 0 - 4 = 0$

$IF_{23} = EC_3 - LS_2 - D_{23} = \square_3 - \triangle_2 - D_{23} = 6 - 4 - 2 = 0$

$IF_{24} = EC_4 - LS_2 - D_{24} = \square_4 - \triangle_2 - D_{24} = 9 - 4 - 5 = 0, \ldots$

Activity	Time (D_{ij}) (1)	ES_i (2)	EC_{ij} (3)	LS_{ij} (4)	LC_j (5)	TF_{ij} (6)	FF_{ij} (7)	IF_{ij} (8)	Criticality
A	4	0	4	0	4	0	0	0	Critical
B	2	4	6	4	6	0	0	0	Critical
C	3	4	7	15	18	11	11	11	---
D	5	4	9	8	13	4	2	2	---
E	12	6	18	6	18	0	0	0	Critical
F	5	11	16	13	18	2	2	0	---
G	9	18	27	18	27	0	0	0	Critical
H	4	11	15	23	27	12	12	10	---
I	3	27	30	27	30	0	0	0	Critical

من جدول الأوقات أعلاه نُلاحظ أن النشاط الحرج هو من يملك القيمة صفر في الأعمدة 6 و7 و8 على التوالي وهذا يتحقق في الأنشطة (A → B → E → G → I) وهذا مطابق لما عليه في المخطط الشبكي أعلاه.

مثال (٥-١١): أفترض أن لدينا البيانات الموضحة بالجدول التالي والخاصة بمشروع معين:

Activity	Precede Act.	Time (Days)
A	-	2
B	-	6
C	-	4
D	A	3
E	C	5
F	A	4
G	B , D , E	2

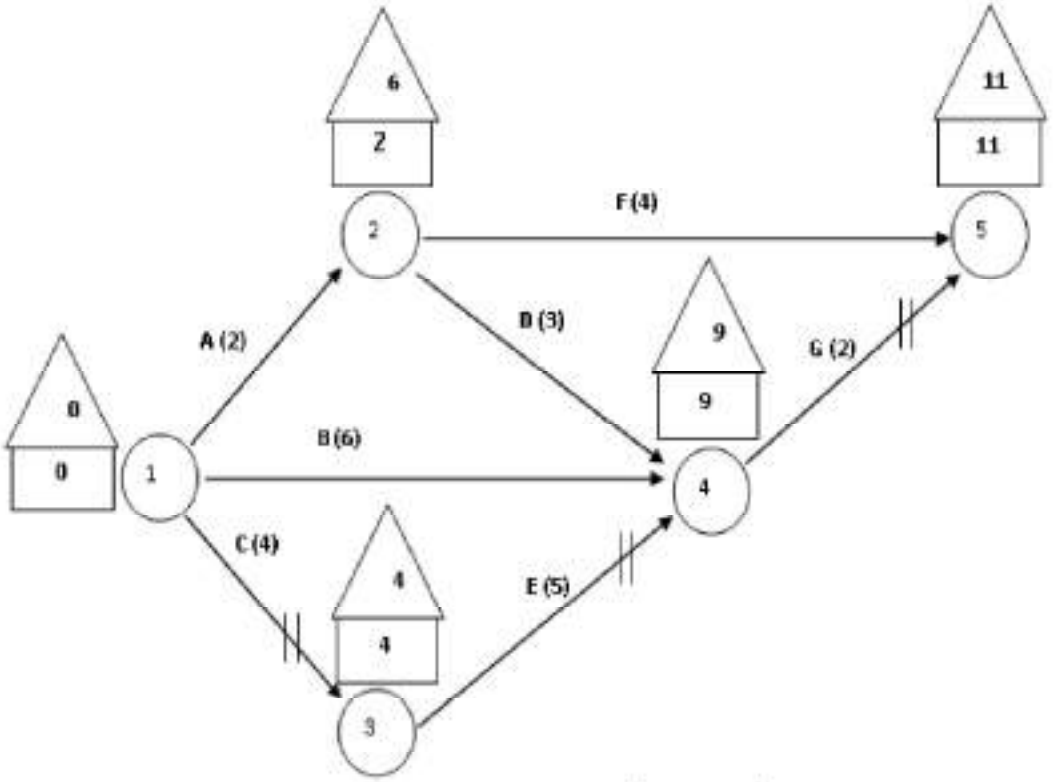
المطلوب: أرسم شبكة الأعمال الخاصة بهذا المشروع، ثم أوجد المسار الحرج مستخدماً طريقة (CPM)، ثم أحسب الأوقات الراكدة والحرة والمستقلة.

الحل: يتم رسم شبكة الأعمال الخاصة بالمسألة أعلاه مع مراعاة الأسبقيات المشار إليها في جدول الأنشطة، ونضع عليها الأوقات المبكرة والمتأخرة مستخدمين القوانين الخاصة بذلك وكما يأتي:

$$EC_j = Max_i(ES_i + D_{ij}) \quad \forall i,j$$

$$LS_i = Min_j(LC_j - D_{ij}) \quad \forall i,j$$

من شبكة الأعمال التالية الخاصة بهذا المشروع والتي تتضمن جميع أنواع



الحسابات المتقدمة والمتأخرة، نجد أن المسار الحرج ووقت إنجاز المشروع هو:

The C.P.: (1 – 3 – 4 – 5)

Time = 11 days

أما أعمدة جدول الأوقات الكلية والحرة والمستقلة فيتم حسابها من قوانينها التالية ومن ثم يتم وضعها في جدول البيانات الأصلية للمسألة كلاً حسب رقم العمود (Column No.)، حيثُ نأخذ بيانات عمود رقم (1) من المسألة الأصلية، أما بيانات عمود رقم (2) والتي تُمثل (ES_i) فتأخذ من المخطط الشبكي مباشرة، أما بقية الأعمدة فيتم تكوينها بالشكل الآتي:

$EC_{ij} = ES_i\ (\square_i) + D_{ij} \rightarrow (Col.3) = (Col.2) + (Col.1)$

$LS_{ij} = LC_j\ (\triangle_j) - D_{ij} \rightarrow (Col.4) = (Col.5) - (Col.1)$

$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij} = \triangle_j - \square_i - D_{ij} \rightarrow (Col.6) = (Col.5) - (Col.2) - (Col.1)$

$FF_{ij} = EC_j - ES_i - D_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij} \rightarrow (Col.7) =$ direct from diagram

$IF_{ij} = EC_j - LS_i - D_{ij} = \square_j - \triangle_i - D_{ij} \rightarrow (Col.8) =$ direct from diagram

علماً أن الأعمدة (2) و (5) قد تم حسابها من قوانينها مسبقاً، ويُمكن استخراجها من المخطط الشبكي أيضاً.

Activity	Time (D_{ij}) (1)	ES_i (2)	EC_j (3)	LS_{ij} (4)	LC_j (5)	TF_{ij} (6)	FF_{ij} (7)	IF_{ij} (8)	Criticality
A	2	0	2	4	6	4	0	0	---
B	6	0	6	3	9	3	3	3	---
C	4	0	4	0	4	0	0	0	Critical
D	3	2	5	6	9	4	4	0	---
E	5	4	9	4	9	0	0	0	Critical
F	4	2	6	7	11	5	5	1	---
G	2	9	11	9	11	0	0	0	Critical

من جدول الأوقات أعلاه نُلاحظ أن النشاط الحرج هو من يملك القيمة صفر في الأعمدة 6 و7 و8 على التوالي وهذا يتحقق في الأنشطة (C → E → G)، وهذا مطابق لما عليه في المخطط الشبكي السابق.

٥-٥ تغيير وقت إتمام الأنشطة Change of Activities Finishing Time[١]

يتطلب الأمر في كثير من الأحيان أن نتنبأ بأثر التغير في وقت أتمام النشاط على الوقت الكلي لإتمام المشروع ككل، جدول (٥-١) التالي يوضح ذلك:

(١) صابر، جمال عبد العزيز، مصدر سبق ذكره، ص ١٥٤.

نوع التغير في وقت النشاط	أثر التغير في وقت إتمام النشاط على الوقت الكلي لإتمام المشروع ككل	
	النشاط الحرج	النشاط غير الحرج
الزيادة في وقت إتمام النشاط بمقدار فترة زمنية معينة	يزداد الوقت الكلي لإتمام المشروع بمقدار الزيادة في وقت إتمام النشاط الحرج	لا يتأثر الوقت الكلي لإتمام المشروع إذا كان مقدار الزيادة في وقت النشاط غير الحرج أقل من أو يساوي الوقت الراكد للنشاط، وإذا كان مقدار الزيادة أكبر فإن الوقت الكلي لإتمام المشروع يزداد بمقدار الفرق بين الزيادة في وقت إتمام النشاط والوقت الراكد لذلك النشاط
النقص في وقت إتمام النشاط بمقدار فترة زمنية معينة	يتأثر الوقت الكلي لإتمام المشروع بالنقص في إتمام النشاط الحرج، ويتطلب الأمر في هذه الحالة إعادة حساب الوقت الكلي لإتمام المشروع للوقوف على هذا الأثر	لا يتأثر الوقت الكلي لإتمام المشروع بالنقص في وقت النشاط غير الحرج

جدول (٥-١) يوضح أثر التغير في وقت إتمام النشاط على الوقت الكلي لإتمام المشروع ككل

مثال (٥-١٢): بالرجوع إلى المثال (٥-١١) السابق نُلاحظ أن المسار الحرج هو (C → E → G)، ولأثبات أن أي تغيير في أوقات الأنشطة الحرجة سواء بالزيادة أو النقصان سوف تؤثر على وقت أتمام المشروع الكلي، وأي تغيير في أوقات الأنشطة

غير الحرجة سواء بالزيادة أو النقصان سوف تؤثر على وقت أتمام المشروع الكلي فقط في حالة أجتيازه حدود الوقت المرن لذلك النشاط.

المطلوب:

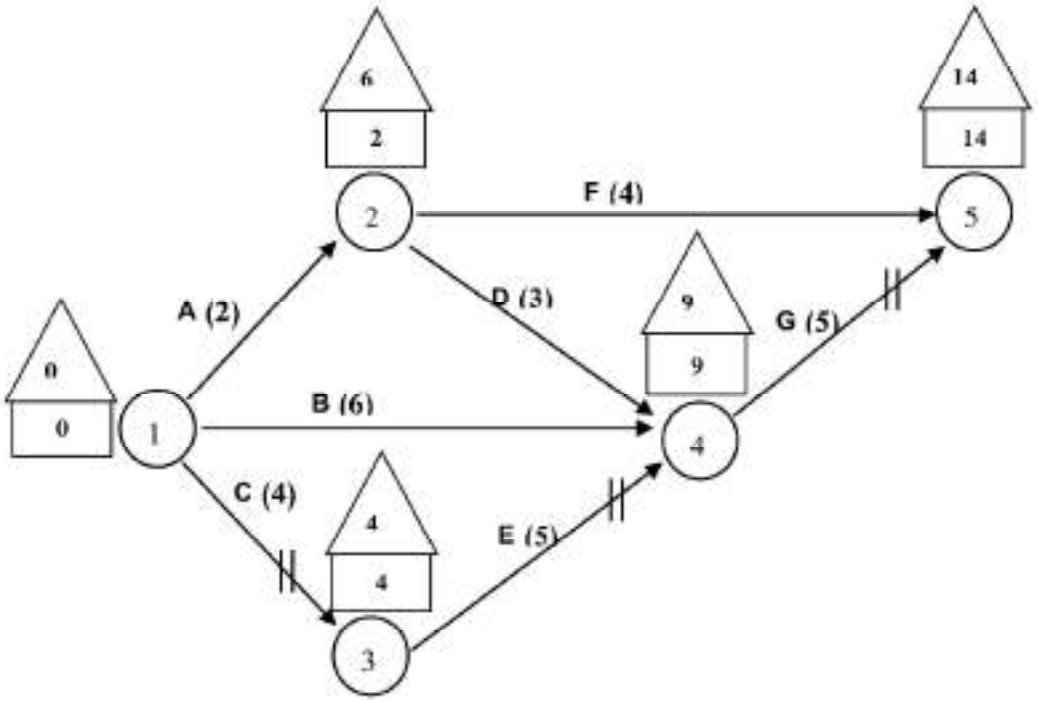
١. أفترض أن وقت النشاط الحرج G قد تغير من يومين إلى 5 أيام، أوجد المسار الحرج؟ ووضح ما مدى تأثير ذلك التغيير.

٢. أفترض أن وقت النشاط غير الحرج A قد تغير من يومين إلى 4 أيام، أوجد المسار الحرج؟ ووضح ما مدى تأثير ذلك التغيير.

٣. أفترض أن وقت النشاط غير الحرج A قد تغير من يومين إلى 7 أيام، أوجد المسار الحرج؟ ووضح ما مدى تأثير ذلك التغيير.

الحل:

١. أن تغيير وقت النشاط الحرج G من يومين إلى 5 أيام، يستدعي أعادة رسم المشروع وإيجاد المسار الحرج.



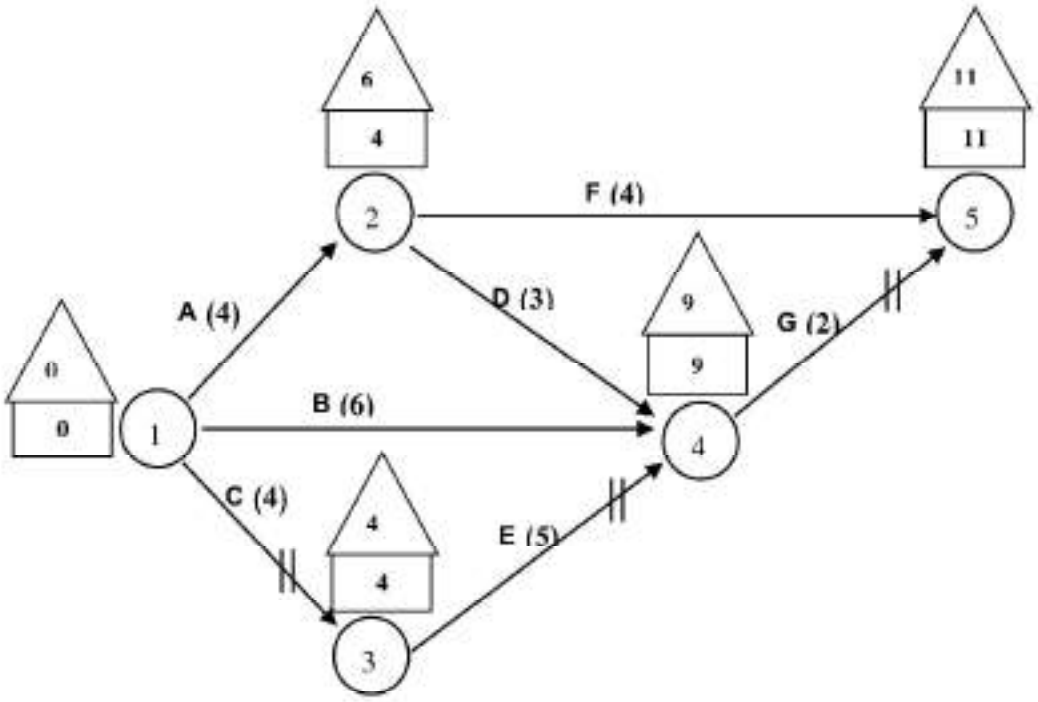
The C.P.: (1 – 3 – 4 – 5), Time = 14 days

نُلاحظ أن زيادة وقت إنجاز النشاط الحرج G بمقدار 3 أيام عما كان عليه سيزيد وقت أنجاز المشروع بنفس المقدار من الأيام حيث كان وقت أنجاز المشروع 11 يوم وأصبح الأن 14 يوم، وبنفس المبدأ لو تم أنقاص وقت النشاط الحرج فأنه سيؤثر على وقت أنجاز المشروع بالنقصان بنفس المقدار.

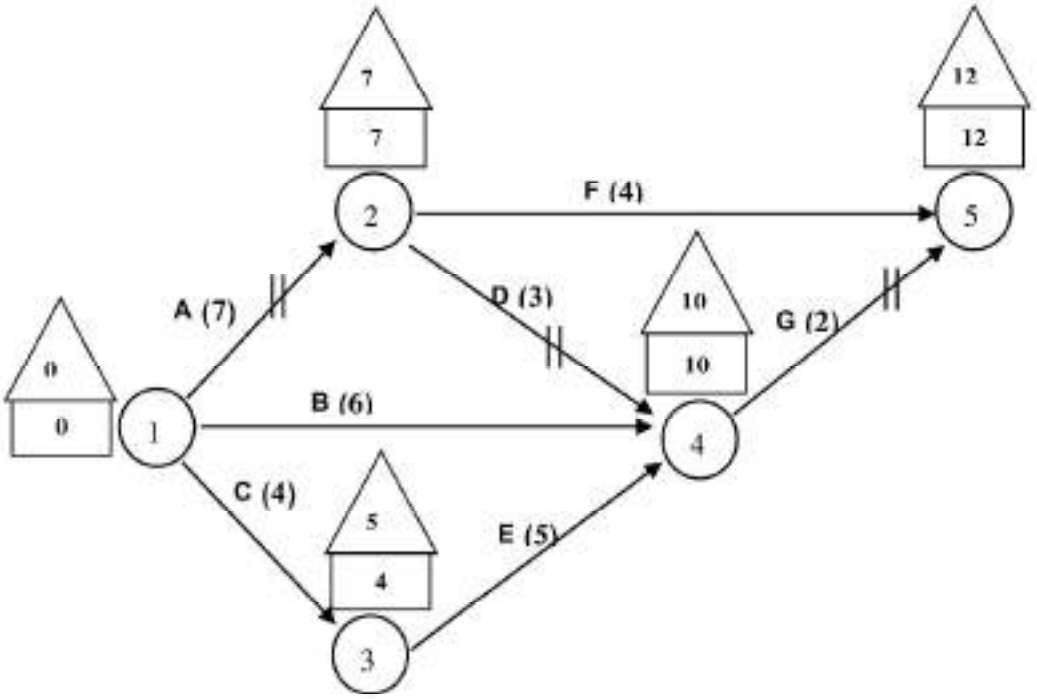
٢. أن تغيير وقت النشاط غير الحرج A من يومين إلى 4 أيام، يستدعي أعادة رسم المشروع وإيجاد المسار الحرج، علماً أن هذا النشاط لديه وقت راكد كلي TF_{ij} يُمثل الحد الأقصى لمقدار التأخير في إتمام هذا النشاط دون أن يؤثر ذلك على الموعد المحدد لإتمام المشروع على المسار الحرج، وبحسب كما يأتي:

$$TF_{12} = LC_2 - ES_1 - D_{12} = \triangle_2 - \square_1 - D_{12} = 6 - 0 - 2 = 4 \text{ أيام}$$

أي لهذا النشاط مرونة للتأخير بمقدار 4 أيام فوق الموعد المخصص له يومين ليصل كحد أقصى 6 أيام دون أن يؤثر ذلك على وقت أنجاز المشروع، وبما أن التغيير المطلوب هو من يومين إلى 4 أيام وهذا أقل من 6 أيام فإن ذلك لا يغير من المشروع أي شيء كما موضح في المخطط الشبكي التالي:



٣. أن تغيير وقت النشاط غير الحرج A من يومين إلى 7 أيام، يستدعي أعادة رسم المشروع وإيجاد المسار الحرج.



The C.P.: (1 – 2 – 4 – 5), Time = 12 days

نلاحظ أن التغيير الذي طرأ على النشاط غير الحرج A قد غير المسار الحرج ووقت أنجاز المشروع، وذلك لأن الوقت الراكد الكلي له قد أجتاز المدة المحددة له.

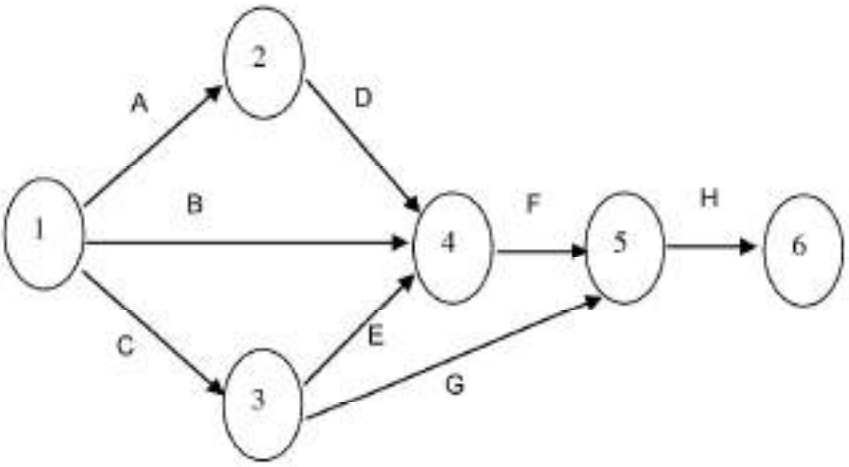
٥-٦ مسائل محلولة

سؤال (٥-١)

أرسم شبكة الأعمال التي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

Activity	Pre. Act.
A	----
B	----
C	----
D	A
E	C
F	B , D , E
G	C
H	F , G

الحل: بالاعتماد على جدول الأسبقيات أعلاه يتم رسم شبكة الأعمال بالشكل الآتي:

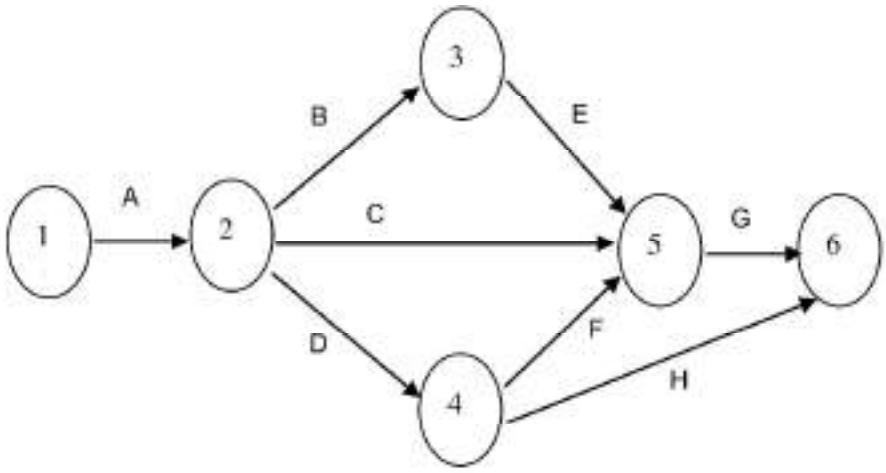


سؤال (٥-٢)

أرسم شبكة الأعمال التي تملك الأنشطة وعلاقات الأسبقية الآتية:

Activity	Pre. Act.
A	---
B	A
C	A
D	A
E	B
F	D
G	C , E , F
H	D

الحل: بالاعتماد على جدول الأسبقيات أعلاه يتم رسم شبكة الأعمال بالشكل الآتي:

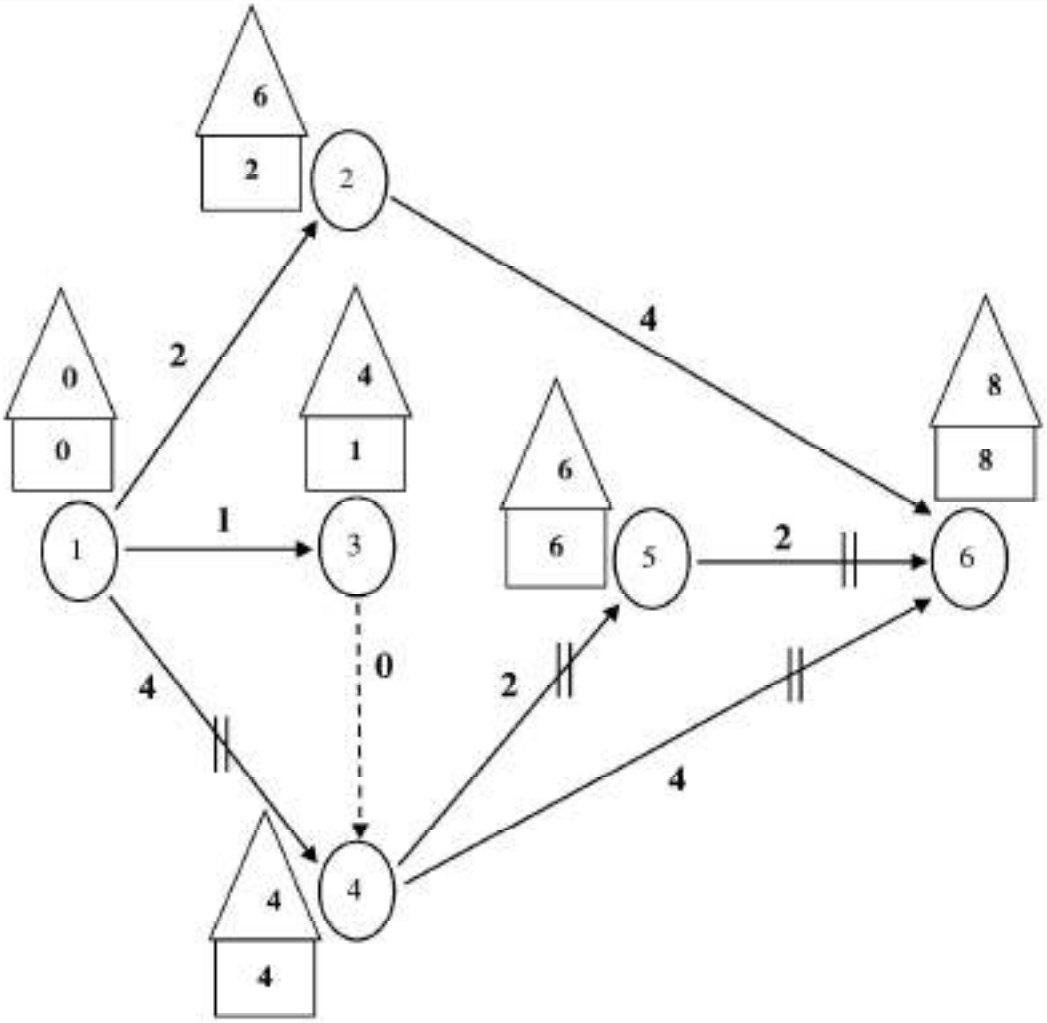


سؤال (٥-٣)

أوجد المسار الحرج لشبكة الأعمال التي تملك الأنشطة والأوقات الآتية:

Activity	time
1 – 2	2
1 – 3	1
1 – 4	4
2 – 6	4
3 – 4	0
4 – 5	2
4 – 6	4
5 – 6	2

الحل: بالاعتماد على جدول الأنشطة وأوقاتها المبين في السؤال يتم إيجاد المسار الحرج لشبكة الأعمال بالشكل الآتي:



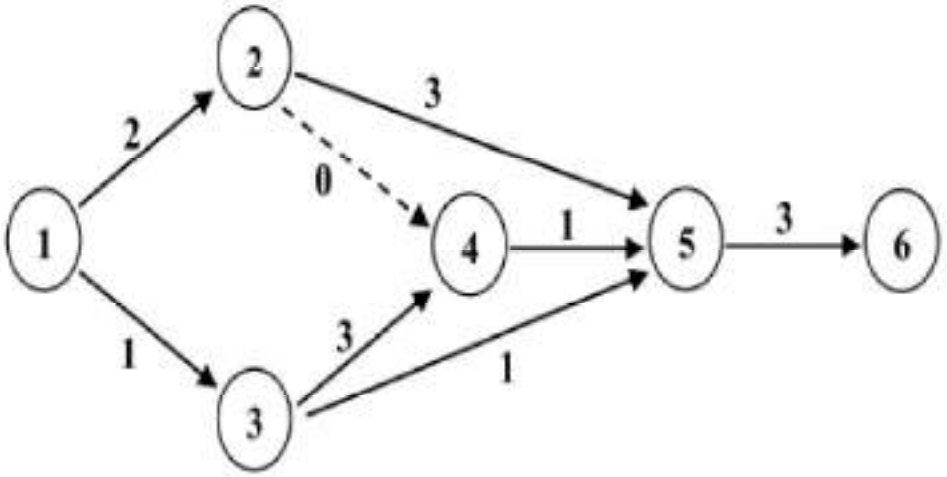
Time = 8

C.P.1 = (1 – 4 – 6)

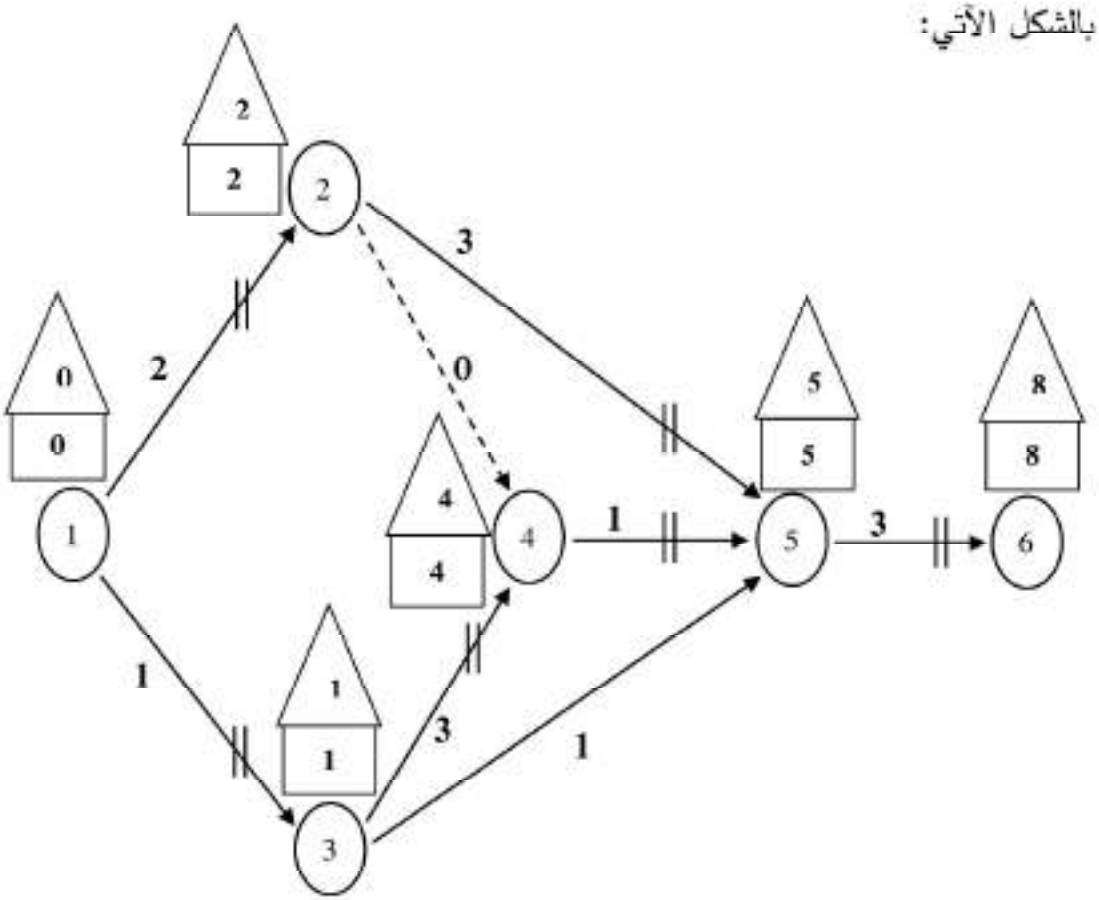
C.P.2 = (1 – 4 – 5 – 6)

سؤال (٥-٤)

أوجد المسار الحرج لشبكة الأعمال الآتية:



الحل: بالاعتماد على المخطط الشبكي أعلاه يتم إيجاد المسار الحرج لهذهِ الشبكة بالشكل الآتي:



Time = 8

C.P.1 = (1 – 2 – 5 – 6)

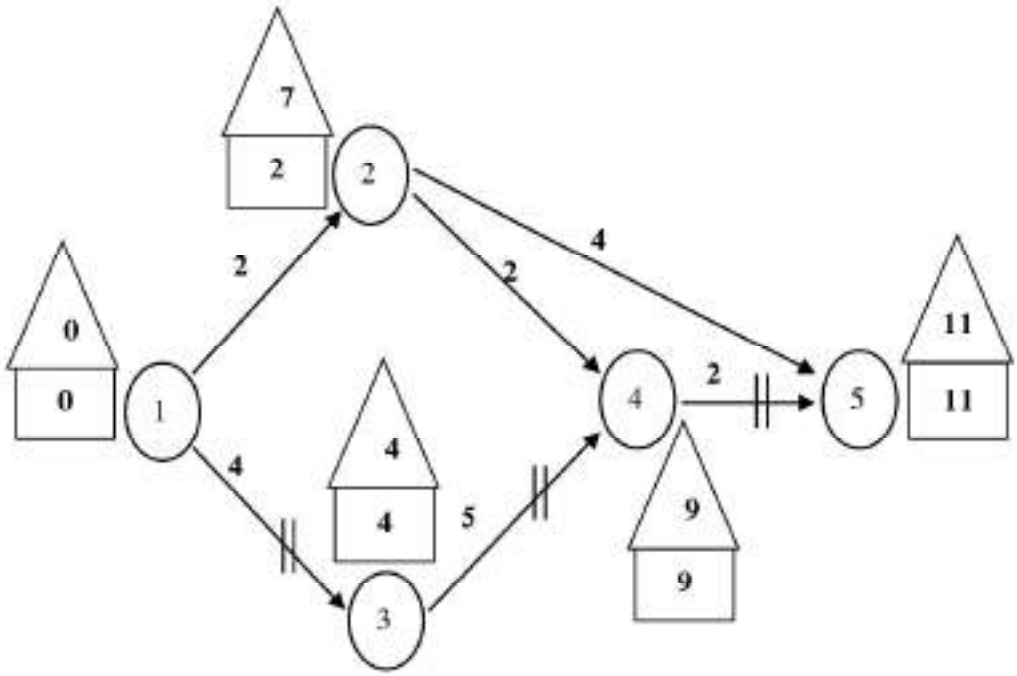
C.P.2 = (1 – 3 – 4 – 5 – 6)

سؤال (٥-٥)

أوجد وقت إنجاز المشروع الكلي والتباين باستخدام أسلوب بيرت لأنشطة المشروع الآتي:

Activity	T_o	T_m	T_p	μ	σ^2
1–2	1	1	7	2	1
1–3	2	3	10	4	1.33*
2–4	1	1	7	2	1
2–5	1	3	11	4	1.67
3–4	2	5	8	5	1*
4–5	1	1	7	2	1*

الحل: نعتمد على التقديرات الثلاث (T_o , T_m , T_p) المعطاة في السؤال أعلاه (مقاسة بالأيام) لحساب عمود متوسط الوقت المتوقع (μ_i) والتباين (σ^2)، ويتم وضع القيم المحسوبة لمتوسط الوقت المتوقع (μ_i) على شبكة الأعمال الخاصة بأنشطة المسألة ومن ثم نستخرج المسار الحرج، كما يأتي:



The Critical Path is (1 – 3 – 4 – 5).

E(T) = 4 + 5 + 2 = 11 days,

V(T) = 1.33 + 1 + 1 = 3.33 .

سؤال (٥-٦)

ترغب أحدى المنشآت الصناعية في إعادة تصميم أحد المنتجات التي تقوم بإنتاجها بغرض تطوير المنتج وعرضه في السوق، وتنوي إدارة المنشأة استخدام نموذج تحليل شبكات الأعمال كأداة لتخطيط المشروع (إعادة تصميم المنتج) والرقابة على تنفيذه، ويتطلب استخدام هذا النموذج قيام الإدارة بخطوتين أساسيتين هما:

الخطوة الأولى: تتمثل في تحليل المشروع إلى مجموعة من الأنشطة المنفصلة (مهام أو وظائف)، بحيث يتحدد لكل نشاط الوقت اللازم لإتمامهِ (أي الوقت الذي يستغرقة النشاط منذ بدء النشاط حتى الأنتهاء منه)، وعلى النحو الآتي:

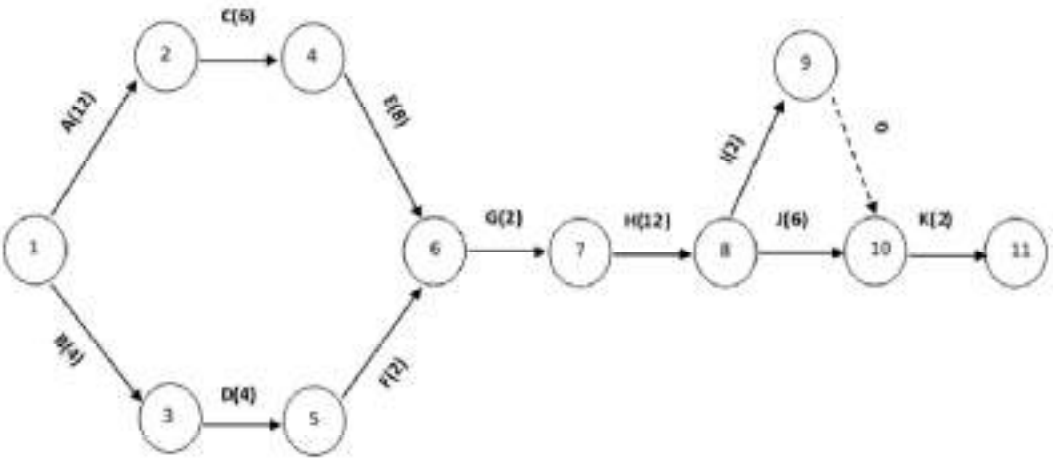
رمز النشاط	أسم النشاط Activity	مدة تنفيذ النشاط (أسبوع)
A	إعادة تصميم المنتج	12
B	إعادة تصميم عملية التعبئة والتغليف اللازمة للمنتج	4
C	طلب وأستلام المكونات اللازمة لإنتاج المنتج	6
D	طلب وأستلام المواد اللازمة لعملية التعبئة والتغليف	4
E	عملية تصنيع وتجميع المنتج	8
F	إعداد وتجهيز مواد التعبئة والتغليف	2
G	القيام بعملية تعبئة وتغليف المنتج	2
H	دراسة وأختبار السوق بالنسبة للمنتج الجديد	12
I	تنقيح عملية تعبئة وتغليف المنتج	2
J	تنقيح المنتج الجديد	6
K	تقديم نتائج الدراسة والتحليل للإدارة	2

وجدير بالذكر أن تحديد الأنشطة التي يتضمنها المشروع يخضع لممارسة الأحكام فيما يتعلق بمستوى التفاصيل (المقياس الزمني) الذي نرغب في تطبيقه، فمن غير المنطق وصف المشروع بنشاط واحد فقط وهو تنفيذ المشروع ككل، ومن غير المنطق أيضاً تحليل الخطة إلى أنشطة تفصيلية كثيرة جداً عندما يقاس الوقت اللازم للنشاط على أساس ساعات العمل بدلاً من عدد الأسابيع، ويتحدد المقياس الزمني المناسب للتطبيق (والذي يؤدي أختلافه إلى أختلاف مستوى التفصيل في الأنشطة التي يتضمنها المشروع محل الدراسة) في ضوء الخبرة وما يتوافر لدينا من معرفة بخصوص طبيعة المشكلة محل الدراسة.

الخطوة الثانية: تتمثل في تحديد العلاقات التتابعية المباشرة التي تربط الأنشطة ببعضها البعض، والتي تعكس التتابع الفني والترتيب المنطقي للأعمال أو المهام

المختلفة التي يتطلبها المشروع، والتي يُمكن توضيحها بالجدول التالي، ومن ثم يتم رسم شبكة الأعمال واستخراج المسار الحرج:

Activity	Pre. Act.	Time
A	---	12
B	---	4
C	A	6
D	B	4
E	C	8
F	D	2
G	E , F	2
H	G	12
I	H	2
J	H	6
K	I , J	2

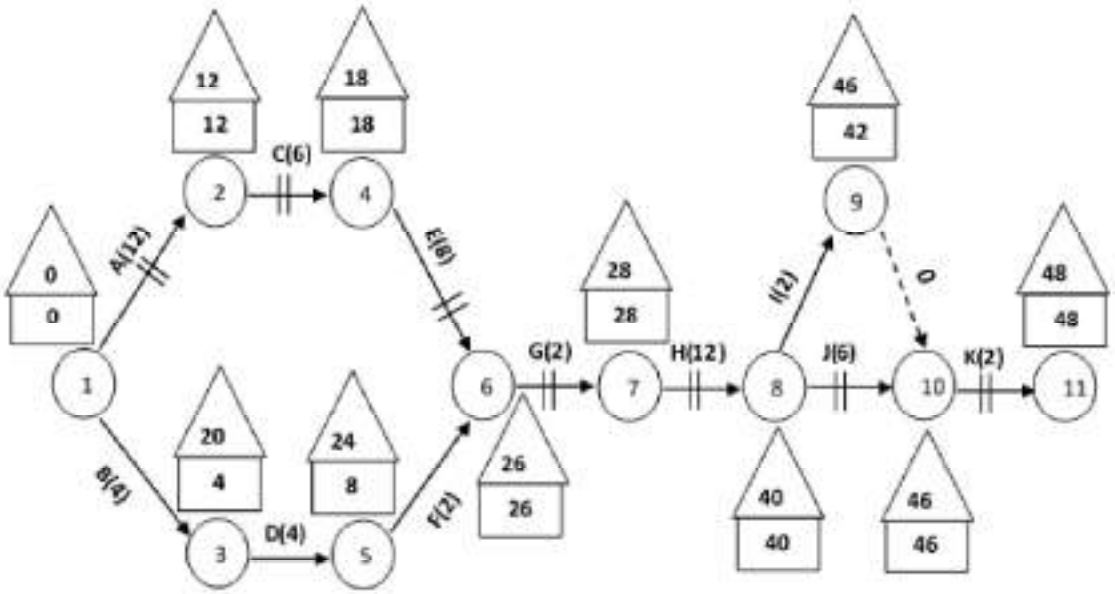


يُمثل السهم المتقطع (10←-- 9) نشاط وهمي، وهو نشاط لا تتضمنه الخطة من الناحية الواقعية ويستخدم لتجنب الغموض في تتابع الأنشطة والحفاظ على علاقات التتابع الفني أو المنطقي بين الأنشطة ويكون وقته دائماً صفر، ويُضاف النشاط الوهمي إلى شبكة الأعمال عندما نرغب في تجنب أن يُمثل سهم واحد أكثر من نشاط من الأنشطة التي يتضمنها المشروع، وهما النشاطين (i) و (j) بسهم واحد.

وهكذا يتضح أن شبكة الأعمال تُمثل تمثيلاً واضحاً ودقيقاً المشروع ككل من حيث الأنشطة التي يتكون منها والوقت اللازم لتنفيذ كل نشاط والعلاقات التتابعة للأنشطة، ولذلك يعد التمثيل البياني للمشكلة من خلال شبكة الأعمال مفيداً جداً في فهم المشكلة، كما يساعد في اكتشاف الخطاء أو أي حذف في قائمة الأنشطة التي يتضمنها المشروع محل الدراسة أو العلاقات التتابعية المباشرة بين الأنشطة.

والتساؤل المطروح هو: ما هو أدنى حد ممكن للوقت الذي يُمكننا فيه إتمام المشروع؟، وترجع أهمية الإجابة على هذا السؤال إلى أن الإدارة ترغب دائماً في تحديد أقل وقت لإتمام المشروع محل الدراسة، كذلك تحديد الأنشطة الحرجة التي يؤدي التأخير في إتمامها إلى تأخير إتمام المشروع ككل، وتفيد هذه المعلومات في حالة إعادة جدولة الأنشطة وإعادة تخصيص الموارد لتلك الأنشطة بشكل يسمح بإتمام المشروع في أقل وقت ممكن وفي حدود الموارد المتاحة.

يُمكن الأن استخراج المسار الحرج للمشروع قيد الدراسة بالشكل الآتي:



Time = 12 + 6 + 8 + 2 + 12 + 6 + 2 = 48 weeks

Critical Path = (1 – 2 – 4 – 6 – 7 – 8 – 10 – 11)

حيثُ نفترض ضمنياً عند حساب الوقت اللازم لإتمام المشروع والذي يقدر بـ48 أسبوع، أنهُ يوجد لدينا موارد كافية تُمكننا من تنفيذ الأنشطة بشكل متزامن إذا تطلبت ذلك، وعلى سبيل المثال، فإن النشاطين A و B يُمكن تنفيذهما بشكل متزامن وإذا لم يتحقق هذا الفرض فإننا سوف نواجه مشاكل تتمثل في تعطيل تنفيذ المشروع.

سؤال (٥-٧)

أوجد المسار الحرج لشبكة الأعمال التي تملك الأنشطة والأوقات التالية، ثم كون جدول بالأوقات الكلية والحرة والمستقلة:

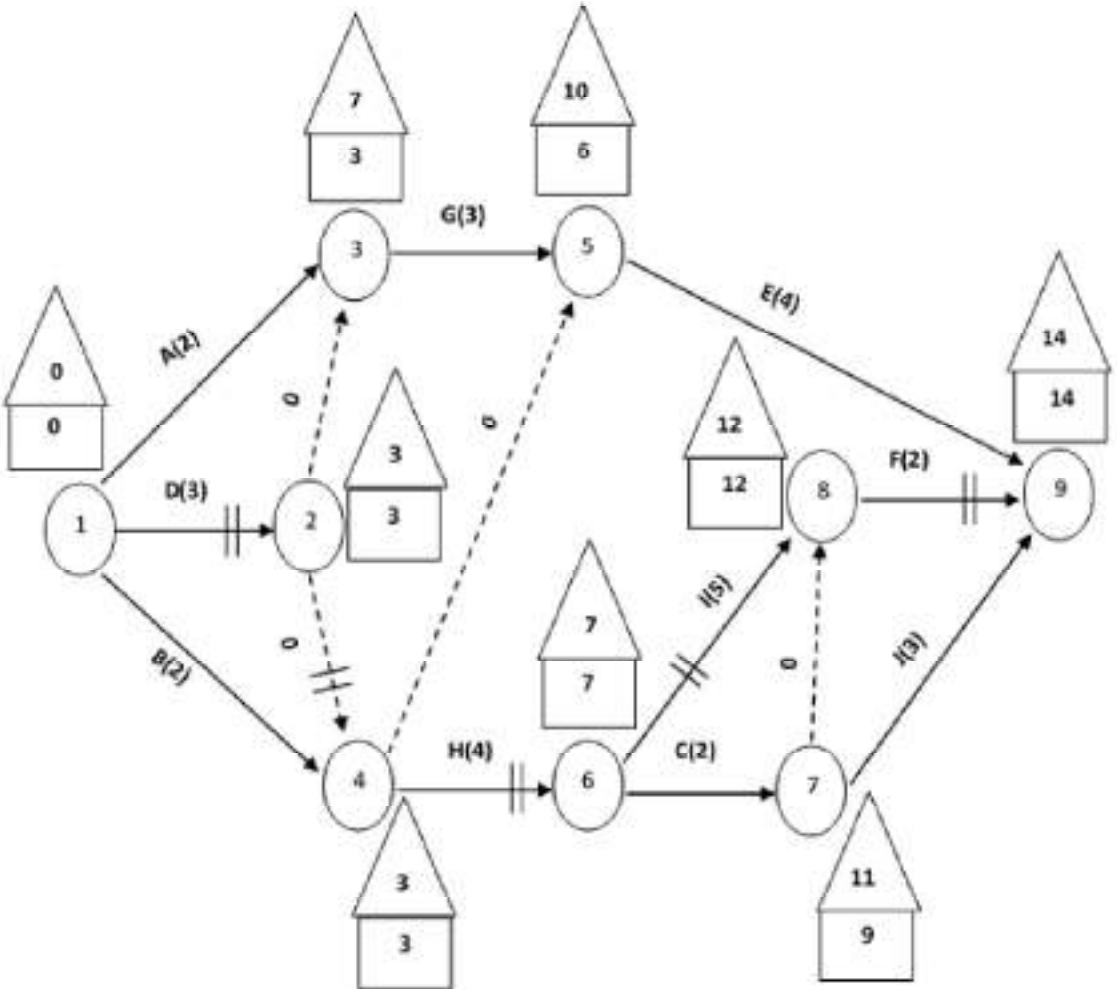
Activity	Predecessor	Duration
A	---	2
B	---	2
C	H	2
D	---	3
E	B , G	4
F	C , I	2
G	A , D	3
H	B , D	4
I	H	5
J	C	3

الحل: بالاعتماد على جدول الأنشطة وأوقاتها المجاور يتم إيجاد المسار الحرج لشبكة الأعمال بالشكل التالي.

بعد رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع يتم استخراج الأنشطة الحرجة ومن ثم المسار الحرج ووقت إنجاز المشروع، وهي بالقيم الآتية:

Time = 14 time's unit

C.P. = (1 – 2 – 4 – 6 – 8 – 9)



أما أعمدة جدول الأوقات الكلية والحرة والمستقلة فيتم حسابها من قوانينها التالية ومن ثم يتم وضعها في جدول البيانات الأصلية للمسألة كلاً حسب رقم العمود (Column No.) بالشكل الآتي:

$$EC_{ij} = ES_i\ (\square_i) + D_{ij} \rightarrow (Col.3) = (Col.2) + (Col.1)$$

$$LS_{ij} = LC_j\ (\triangle_j) - D_{ij} \rightarrow (Col.4) = (Col.5) - (Col.1)$$

$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij} = \triangle_j - \square_i - D_{ij}$ → (Col.6)= (Col.5) − (Col.2) − (Col.1)

$FF_{ij} = EC_j - ES_i - D_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$ → (Col.7) = direct from diagram

$IF_{ij} = EC_j - LS_i - D_{ij} = \square_j - \triangle_i - D_{ij}$ → (Col.8) = direct from diagram

علماً أن عمود (1) يعطى في السؤال، والأعمدة (2) و (5) قد تم حسابها من قوانينها مسبقاً، ويُمكن استخراجها من المخطط الشبكي أيضاً.

Activity	Time (D_{ij}) (1)	ES_i (2)	EC_j (3)	LS_{ij} (4)	LC_j (5)	TF_{ij} (6)	FF_{ij} (7)	IF_{ij} (8)	Criticality
A	2	0	2	5	7	5	1	1	---
B	2	0	2	1	3	1	1	1	---
C	2	7	9	9	11	2	0	0	---
D	3	0	3	0	3	0	0	0	Critical
E	4	6	10	10	14	4	4	0	---
F	2	12	14	12	14	0	0	0	Critical
G	3	3	6	7	10	4	0	-4	---
H	4	3	7	3	7	0	0	0	Critical
I	5	7	12	7	12	0	0	0	Critical
J	3	9	12	11	14	2	2	0	---

من جدول الأوقات أعلاه نُلاحظ أن النشاط الحرج هو من يملك القيمة صفر في الأعمدة 6 و7 و8 على التوالي وهذا يتحقق في الأنشطة (D → H → I → F)، وهذا مطابق لما عليه في المخطط الشبكي السابق حيث أن المسار الحرج هو (1 → 2 → 4 → 6 → 8 → 9).

تمارين الفصل السادس

تمرين (٥-١)

تعاقدت أحدى دور نشر الكتب مع أحد المؤلفين لطباعة ونشر كتابهِ، حيثُ تتضمن هذهِ العملية عدة أنشطة بسيطة موضحة بالجدول أدناه، وعلى المؤلف تزويد دار النشر بنسخة ورقية وألكترونية من كتابهِ.

Activity	Act. Meaning	Predecessor	Duration (weeks)
A	Manuscript proofreading by editor	---	3
B	Sample pages preparation	---	2
C	Book cover design	---	4
D	Artwork preparation	---	3
E	Author's approval of edited manuscript and sample pages	A , B	2
F	Book formatting	E	4
G	Author's review of formatted pages	F	2
H	Author's review of artwork	D	1
I	Production of printing plates	G , H	2
J	Book production and binding Predecessor	C , I	4

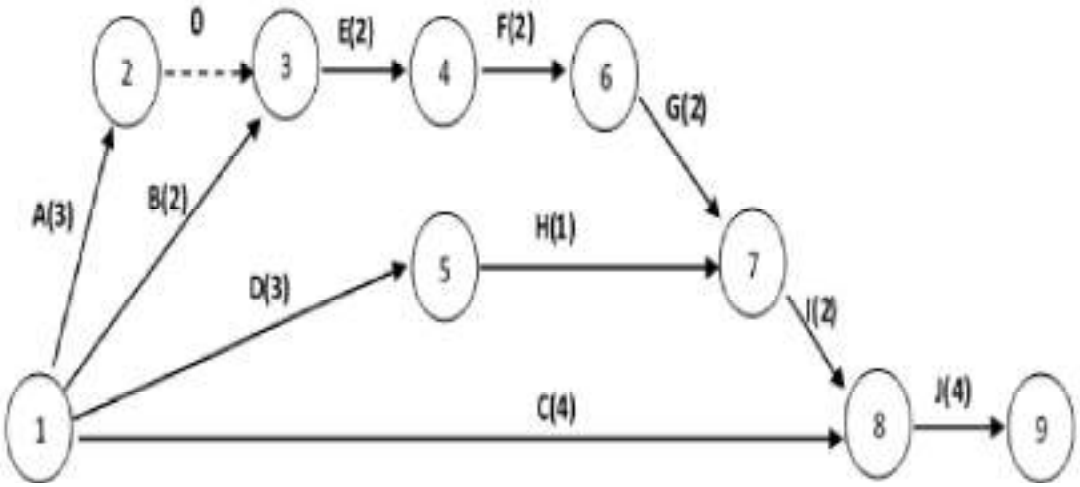
المطلوب:

١. أرسم شبكة الأعمال الخاصة بدار النشر أعلاه.

٢. أوجد المسار الحرج لهذا المشروع.

٣. كون جدول الأوقات الكلية والحرة والمستقلة لهذا المشروع.

(مساعدة: الشكل التالي يوضح شبكة الأعمال للمشروع أعلاه).



تمرين (٥-٢)

أوجد المسار الحرج لشبكات الأعمال التي تملك الأنشطة والأوقات التالية، ثم كون جدول بالأوقات الكلية والحرة والمستقلة:

A)

Activity	Predecessor	Duration
A	---	4
B	---	3
C	---	6
D	A , B	3
E	B	4
F	B	2
G	C , F	5
H	B	4
I	E , H	2
J	E , H	3
K	C , F , J	4
L	K	5

B)

Activity	Predecessor	Duration
A	---	5
B	---	4
C	---	2
D	A	6
E	A	3
F	A	6
G	B , D	2
H	C , G	8
I	B , D	3
J	E , H	3
K	I	4
L	I	5
M	F , E , H	1
N	F , E , H	3
O	M , N	6
P	J , K , O	5

تمرين (٥-٣)

تعمل شركة على أعداد موازنة شاملة لعلمية أنتاج منتج جديد، يمر هذا المنتج بعدة أنشطة قبل أكتمال إنتاجه بالصيغة النهائية، الجدول التالي يوضح الأنشطة الرئيسية لهذه العملية:

Activity	Act. Meaning	Predecessor	Duration (weeks)
A	Forecast sales volume	---	10
B	Study competitive market	---	7
C	Design item and facilities	A	5
D	Prepare production schedule	C	3
E	Estimate cost of production	D	2
F	Set sales price	B , E	1
G	Prepare budget	E , F	14

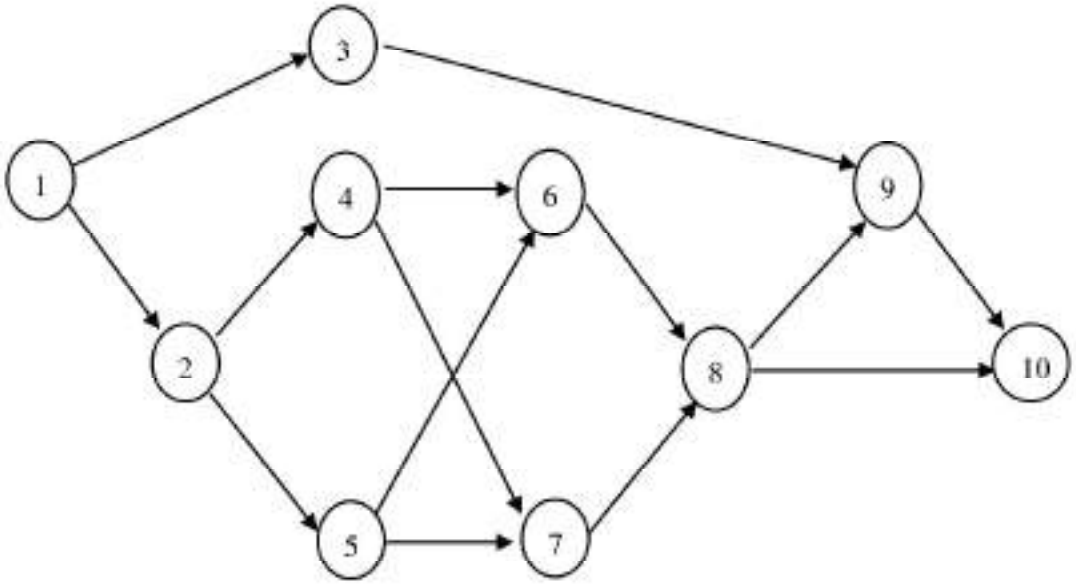
المطلوب:

١. أرسم شبكة الأعمال الخاصة بعملية الإنتاج أعلاه.

٢. أوجد المسار الحرج لهذا المشروع.

تمرين (٥-٤)

أفترض لديك شبكة الأعمال الآتية:



المطلوب:

١. أوجد المسار الحرج لشبكة الأعمال أعلاه إذا كنت تملك أوقات الأنشطة الآتية:

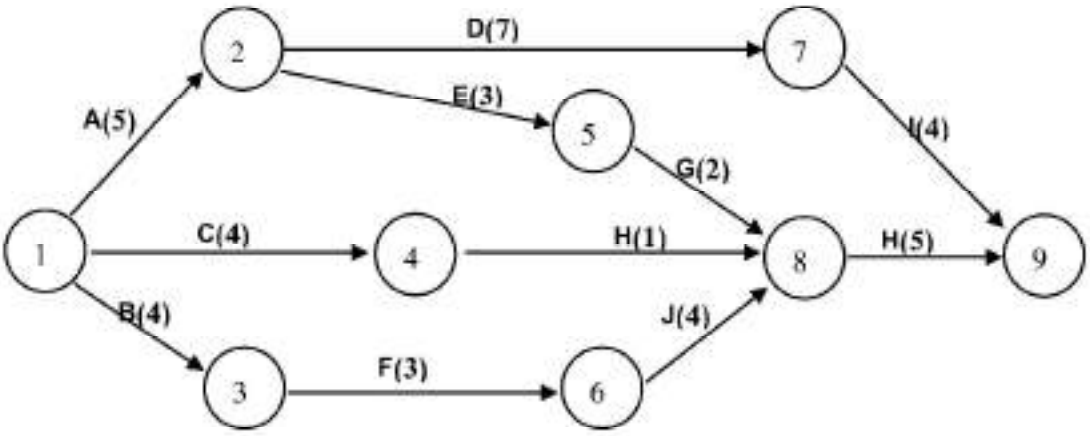
Jobs	1-2	1-3	2-4	2-5	3-9	4-6	4-7	5-6	5-7	6-8	7-8	8-9	8-10	9-10
Time	5	6	9	12	7	12	10	9	3	8	5	1	8	3

٢. طبق أسلوب PERT للشبكة السابقة إذا كنت تملك الأوقات الأحتمالية الآتية:

Jobs	1-2	1-3	2-4	2-5	3-9	4-6	4-7	5-6	5-7	6-8	7-8	8-9	8-10	9-10
T_o	4	4	8	10	2	7	6	7	4	6	4	7	4	7
T_m	5	6	8	11	5	7	8	8	11	7	5	8	6	7
T_p	6	8	14	18	8	7	10	15	12	8	6	15	8	7

تمرين (٥-٥)

أفترض لديك شبكة الأعمال الآتية:



المطلوب:

١. أوجد المسار الحرج لهذا الشبكة.

٢. كون جدول بالأوقات الكلية والحرة والمستقلة.

الفصل السادس

نظرية المباراة Game Theory

٦-١ مقدمة Introduction

توفر نظرية المباراة (Game Theory) التحليل الرياضي المناسب الذي يساعد في فهم الظواهر التي يتنافس فيها صناع القرار لإتخاذ قرارات (Decision-Making) تتعلق باستراتيجيات (خطط) منفردة أو مجتمعة ذات مصالح متضاربة (Conflict Situation) للوصول إلى أفضل الخيارات الممكنة.

إن الاستراتيجيات التنافيسية (Competitive Strategies) التي قد يتبعها الطرف الأول (قطاعات حكومية، شركة صناعية، مرشح أنتخابي، ...) قد تتأثر بنوع الاستراتيجية التي قد يتخذها الطرف الثاني (قطاع حكومي آخر، شركات صناعية منافسة، مرشح أنتخابي منافس، ...)، بالتالي فإن نظرية المباراة تُستخدم لاتخاذ القرارات الاستراتيجية أو للتنبؤ بنتائج مجموعة من العوامل المتفاعلة، حيث قد يُؤثر عمل أحد العوامل بشكل مباشر على عائد العملاء المشاركين الآخرين، وقد يُشار إلى مُعظم هذهِ المباريات بغير التعاونية (Non-Cooperative Game) أستناداً على حالة المصالح المتضاده بين المتنافسين.

أما كلمة المباراة (Game) فهي تُشير إلى أنواع المنافسة أو الصراعات المختلفة التي قد تنشأ بين طرفين أو أكثر وفقاً لأهداف وقواعد محددة ومعروفة مسبقاً، ويُلاحظ ذلك بشكل واضح في الحروب والمؤسسات الإنتاجية والصناعية المتنافسة لتسويق بضائعها وحملاتها الإعلامية لمختلف الأغراض.

تعود البداية التأريخية لنظرية المباراة إلى النصف الأول من القرن العشرين وترتبط مع تطور نظرية المجاميع الرياضية والاقتصاد الرياضي، وأرتفع مستوى تطبيق هذه النظرية في نهاية القرن العشرين لتساهم في حل مشاكل أكثر جدية تتعلق بعلم الاجتماع، الاتصالات، الاقتصاد والسياسة بالإضافة إلى العلوم العسكرية وغيرها من فروع المعرفة.

تنقسم المباراة إلى ثلاث فئات رئيسية كما في شكل (٦-١) وهي:

١. مباراة الفرصة الحرة (Game of Pure Chance): عندما تتاح أمام كل لاعب الاستراتيجية الواضحة النقية التي تحقق له أكبر منفعة (أقل خسارة) مقارنة بالبدائل الأخرى.
٢. المباراة الاستراتيجية (Game of Strategy): عندما يضع كل لاعب الخيارات المتاحة أمامه ومن ثم يختار الاستراتيجية الفعالة لمواجهة الاستراتيجية المختارة من قبل اللاعب المنافس.
٣. المباراة الاستراتيجية والفرص (Game of Strategy and Chance): تنشأ في المباراة غير التعاونية عندما يختار اللاعب الاستراتيجية ذات الفرصه الأفضل لتحقق مصالحه.

بشكل أكثر تحديداً، يُمكن تصنيف هذه الأنواع الثلاثة من المباراة إلى مباراة (تعاونية Co-Operative Game وغير تعاونية Non-Cooperative Game)، فالتعاونية هي مباراة يُمكن فيها للاعبين التعاون من أجل تحقيق أقصى قدر من المكاسب، ويتم ذلك بإجراء مباراة بين مجاميع من اللاعبين بدلاً من الأفراد استناداً إلى

تحركات اللاعبين مع بعض (كما في مباراة كرة القدم) أو واحداً تلو الآخر (كما في مباراة سباق التتابع).

كما ينقسم التصنيف الأخير إلى مجموعتين، المجموعة الأولى تتضمن المباراة الثابتة (Static) عندما يستخدم اللاعبون استراتيجيتهم في نفس الوقت دون أن يعرفوا ما هي استراتيجيات اللاعبين الآخرين، أو المباراة الديناميكية (Dynamic) عندما يستخدم اللاعبون استراتيجيتهم بطريقة محددة مسبقاً.



شكل (٦-١) تصنيفات المباراة

أما المجموعة الثانية فيتم تصنيفها أعتماداً على نوع المعلومات (المعطيات) سواء كانت كاملة (Complete) أو غير كاملة (Incomplete) وذلك يعتمد على المعرفة المسبقة لكل لاعب وهل لديه دراية لخصائص الآخرين، وخططهم الاستراتيجية، ومقدار العائد المتوقع من كل استراتيجية،... .

وعليه فإن هنالك بعض العناصر المهمة التي يجب توفرها في كل مباراة وهي:

1. يدعى طرفي المباراة أو المنافسة بالخصوم أو اللاعبين (Players) ويفترض أن أهتمامات ورغبات أحدهما مضاده (معاكسه) لأهتمامات ورغبات الآخر.
2. عدد لاعبي المباراة محدد ولا يتصل اللاعبون بعضهم ببعض، أي ما يختاره اللاعب الأول من استراتيجية لا يعرف به اللاعب الآخر، حيثُ أن لكل لاعب عدد محدد من الاستراتيجيات.
3. لكل مباراة قواعد معروفة ومحدودة، وأن قرارات جميع اللاعبين يتم أتخاذها في نفس الوقت.
4. لكل لاعب الحق باختيار الاستراتيجية التي تحقق له أفضل عائد ممكن من بين مجموعة من الخيارات (Choices) محددة أو غير محددة، وهذا القرار بدورهِ سيؤثر على ما يحققهُ اللاعب الآخر المشترك في نفس المباراة.
5. بسبب محدودية وقت المباراة وعدم وجود معلومات كافية وتامة فإن متخذ القرار غير متأكد من أمكانية حدوث حدث معين من عدمهِ.
6. أن عناصر مصفوفة الدفع (Payoff Matrix) (أو تدعى مصفوفة اللعبة، مصفوفة ربح اللاعب (A)، مصفوفة خسارة اللاعب (B)) تُمثل العائد (المردود) الذي يحصل عليه كل طرف من أطراف المباراة نتيجة تطبيقهِ لإحدى خططهِ، وتُمثل المباراة بمصفوفة دفع صفوفها تُمثل ما يحصل عليه اللاعب (A) نتيجة اختياره لكل استراتيجية من استراتيجياتهِ المتاحة وقد يدعى لاعب الأسطر، وأعمدتها تُمثل نتائج استراتيجيات اللاعب (B) وقد يدعى لاعب الأعمدة، وقد يُشار إلى مصفوفة الدفع بمصفوفة ربح اللاعب (A) أو مصفوفة خسارة اللاعب (B)، والشكل العام لمصفوفة الدفع موضحة في الصيغة الآتية:

Player B

Player A		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
	:	:	:		:		:
	A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
	:	:	:		:		:
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Payoff Matrix

حيث إن:

A_i تُمثل استراتيجيات اللاعب (A) لكل قيم ($i=1,2,...,m$).

B_j تُمثل استراتيجيات اللاعب (B) لكل قيم ($j=1,2,...,n$).

a_{ij} نتائج (قيمة) الدفع بدلالة ما سيحصل عليه اللاعب (A) من اللاعب (B) لكل قيم i و j.

ومن الجدير بالذكر أن هناك ميزات تنافسية تستطيع الشركة أو المؤسسة اتباعها لزيادة الأرباح أو تقليل الخسائر، مثال ذلك:

- شركة تنتج ملابس بنفس جودة ملابس الشركات المنافسة لكن بتكلفة أقل.
- مصنع قام بتحديث وتعزيز الخطوط الإنتاجية بالتكنلوجيا الحديثة قبل المصانع المنافسة.
- مطعم للمأكولات أستطاع كسب ود الأطفال وعوائلهم وذلك بأنشاء ملعب جميل لألعاب الأطفال داخل حديقة المطعم، مقارنة بالمطاعم المجاورة التي لا تمتلك هذه الميزة.

رغم أختلاف الميزة التنافسية إلا أنها قد تستمر لوقت قصير أو لسنوات عدة، وهي بالتالي تنشأ نتيجة لعوامل **خارجية** مثل (تغير أقبال العميل على سلعة معينة، التغيرات الاقتصادية المحلية أو الدولية وأثرها على السوق، مجارات سرعة التغيرات التكنلوجية واستخدامها لتحديث أو ابدال الخطوط الانتاجية القديمة)، أو عوامل **داخلية** مثل (إجراء تغييرات جذرية في سياق عمل الشركة لخلق حالة تنافسية غير متاحة للمنافسين الاخرين، كانشاء ملعب حديث للأطفال داخل المطعم – هذهِ ميزة غير متاحة لجميع المطاعم، أو كالتعاقد مع لاعب دولي محترف وضمهُ إلى فريق محلي معين – هذهِ ميزة يصعب الحصول عليها من قبل جميع الفرق المحلية).

٦-٢ تصنيف المباراة Game Classification

يُمكن تصنف المباراة إلى ثلاث أقسام هي:

٦-٢-١ حسب عدد اللاعبين:

١. مباراة لشخص واحد (One-Person Game) فقط، مثل لعبة السوليتير التي تعتمد أساساً على الصدفة والحظ في خلط الأوراق، وهي لعبة فردية لا تتضمن خصوم حقيقيين والمنفعة الوحيدة تصب في المصلحة الفردية لذلك اللاعب.

٢. مباراة لشخصين (Two-Person Game) فقط، مثل لعبة الشطرنج حيث يشترك بها لاعبين فقط، وهذا النوع من المباراة الأكثر شهره.

٣. مباراة متعدد الأطراف [1](n-Person Game) حيثُ يكون عدد المشاركين أكثر من أثنين ($n \leq 3$) مثل لعبة البوكر، وعند محاولة ايجاد الحل الأمثل لهذهِ المباراة يصاغ عادة إلى تقليص عدد اللاعبين إلى اثنين ومن ثم حلها أو تطبيق مبدأ السيطرة (الهيمنة) (Domination) [2].

٦-٢-٢ حسب عدد الاستراتيجيات:

١. مباراة محدودة (حرة Pure): تتيح هذه المباراة عدد محدد من الاستراتيجيات أمام كل لاعب.

٢. مباراة غير محدودة (مختلطة Mixed): توفر هذهِ المباراة عدد غير محدد من الاستراتيجيات لكل لاعب.

٦-٢-٣ حسب نتيجة المباراة:

١. مباراة ذات المجموع غير الصفري (Non Zero-Sum Game): لا يشترط هنا أن ما يربحهُ اللاعب الأول يساوي خسارة الثاني بل قد يخسر أو يربح كلا طرفي المباراة سوياً، وبالتالي فإن النتيجة قد لا تكون صفرية.

٢. مباراة ذات المجموع الصفري (Zero-Sum Game): يشترط هنا أن ما يربحهُ اللاعب الأول (A) يساوي ما يخسرهُ اللاعب الثاني (B) وبالتالي فإن نتيجة

---

(1) Rama Murthy P., (2007), Operations Research, 2nd ed., New Age International (P) Ltd., Publishers, ISBN (13) : 978-81-224-2944-2, p. 488.

(2) For more information about n-person games see reference 'Winston Wayne L., (2004), 'Operations Research: Application and Algorithms', Thomson Learning, USA, Chapter14, p. 847.

المباراة ذات مجموع صفري، وعليه فإن مصفوفة الدفع للاعب (B) هي نفسها للاعب (A) ولكن بعكس الأشارة، ولأهمية هذا النوع من المباراة ولبساطتها سيتم التركيز عليها في هذا الفصل.

٦-٣ مباراة ذات المجموع الصفري لشخصين بنقطة (Two-Person Zero-Sum Games with Saddle Point):

هذهِ المباراة تمتاز بعدة صفات منها [1]:

١. لهذهِ المباراة لاعبين الأول (A) يُمثل الصفوف والثاني (B) يُمثل الأعمدة.

٢. للاعب (A) عدد (m) من الاستراتيجيات، لهُ الحق بأختيار أحدهما ولتكن (i)، وفي الوقت نفسهِ يحق للاعب (B) أختيار أحد استراتيجياته من بين (n) من الاستراتيجيات ولتكن (j)، عندها سيربح اللاعب (A) عائد مقداره (a_{ij}) وبالمقابل سيخسر اللاعب (B) نفس المقدار (a_{ij})، ويمكن التفكير بهذا وكأنه ربح اللاعب (A) قيمة العائد من اللاعب (B)، ولهذا تدعى هذهِ المباراة بمباراة ذات المجموع الصفري لشخصين.

٣. يتم الوصول إلى القيمة المثلى للمباراة عندما نحصل على نقطة ارتكاز (Saddle point) أو نقطة توازن (Equilibrium point) وهذا يتم عندما تتساوى قيمة معياري (MiniMax) و (MaxiMin) كما موضح بالأمثلة التالية.

مثال (٦-١): أفترض لديك مصفوفة الدفع بحجم (3×3) التي تخص اللاعب (A)، المطلوب إيجاد قيم معياري (MiniMax) و (MaxiMin) وقيمة المباراة.

---

(1) Taha, Hamdy A., (2007), **Op. Cit.**, p. 521.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	6	5	7
A_2	2	3	1
A_3	4	4	10

الحـل: أن مصـفوفة الـدفع أعـلاه تخـص اللاعـب (A) وأن كـل قيمـة موجبـة داخـل المصفوفة تُمثل عائد للاعب (A) وخسارة لـ(B) والقيم السالبة هي خسارة لـ(A) وربح للاعب (B). يُمكن حل المثال بإجراء الخطوات التالية:

١. خطوات اللاعب (A):

- أختيار أقل عائد (Min) لكل استراتيجية من استراتيجيات الصف الواحد في جميع الصفوف، وهي على التوالي (5، 1، 4).
- أختيار أعظم قيمة (Max) من بين القيم الأقل عائد للصفوف في الخطوة السابقة وهي القيمة (5)، وهي تقابل الاستراتيجية (A_1) التي سيلعبها اللاعب (A) كأساس لمواجهة اللاعب الخصم (B)، وهذه القاعدة تدعى بمعيار (MaxiMin).
- بسبب ظروف التنافس وقلة المعلومات المتوفرة عن الخصم (B) فإن اللاعب (A) يتوقع أن يحقق أسوء النتائج، والقيمة (5) بالنسبة له أفضل (Max) ما هو موجود من بين النتائج السيئة (Min) التي تم اختيارها بالصفوف.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	5	7	(5) ← MaxiMin
A_2	2	3	1	1
A_3	4	4	10	4

٢. خطوات اللاعب (B):

- أختيار أكبر خسارة (Max) لكل استراتيجية من استراتيجيات العمود الواحد في جميع الأعمدة، وهي على التوالي (6، 5، 10).
- أختيار أقل خسارة (Min) من بين قيم الخسارات العظمى للأعمدة في الخطوة السابقة وهي القيمة (5)، وهي تقابل الاستراتيجية (B_2) التي سيلعبها اللاعب (B) كأساس لمواجهة الخصم (A)، وهذه القاعدة تدعى بمعيار (MiniMax) وهي أفضل أسوء الخسارات التي من خلالها يقلل اللاعب (B) خسائره إلى أدنى حد ممكن، وهي أفضل النتائج التي ممكن الحصول عليها.
- بسبب ظروف التنافس وقلة المعلومات المتوفرة عن الخصم (A) فإن اللاعب (B) يتوقع أن يحقق أعظم الخسائر، والقيمة (5) بالنسبة له أدنى (Min) ما هو موجود من بين الخسائر العظمى (Max) التي تم اختيارها بالأعمدة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	5	7	(5) ← MaxiMin
A_2	2	3	1	1
A_3	4	4	10	4
Column Maximum	6	(5)	10	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نلاحظ أن الاستراتيجية المثلى لكل لاعب والقيمة المثلى للمباراة هي:

الاستراتيجية المثلى لكل لاعب

- MiniMax value = MaxiMin value = 5 (optimal strategies)
- The game value $(v^*) = 5$ القيمة المثلى للمباراة (*)
- The saddle point in (A_1) & (B_2)

أن القيمة المثلى للمباراة $(v^* = 5)$ تعبر عن الحل الأمثل لكلا اللاعبين في ظل ظروف التنافس المتمثلة بمصفوفة الدفع أعلاه، لذلك يطلق عليها بمباراة ذات المجموع الصفري لأن الحصيلة النهائية للمنفعة المتبادلة تساوي صفر، وأن هنالك نقطة ارتكاز عند الاستراتيجية الحرة المثلى (A_1,B_2) التي تحققت عندما تساوت قيمتي (MiniMax value = MaxiMin value)، وقد تكتب الاستراتيجية الحرة لهذهِ

(*) عندما نحصل على القيمة المثلى للمباراة يتم تمييزها بوضع العلامة (*) فوق الحرف (v)، ولا توضع هذهِ العلامة إذا كانت قيمة المباراة ضمن فترة محددة أي لا تملك قيمة محددة نهائية (نجد ذلك لاحقاً عند عدم وجود نقطة ارتكاز محددة).

المسألة بالصيغة (1,2)، حيثُ يحصل كلا اللاعبين على أفضل النتائج (ربح (5) وحدات للاعب (A)، وهي تعادل ما يخسره اللاعب (B)) ولا توجد هناك رغبة حقيقية من قبل اللاعبين لتغيير تلك الاستراتيجيات في الوقت الحالي وتستقر المباراة عند ذلك، لأن ما يربحه الأول يعادل ما يخسره الثاني.

مثال (٦-٢): أفترض لديك مصفوفة الدفع التالية للاعب (A)، المطلوب إيجاد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	10	9	7
A_2	3	2	-2
A_3	5	4	1

الحل:

يُمكن حل المثال بإجراء الخطوات التالية:

١. خطوات اللاعب (A):

- أختيار أقل عائد (Min) لكل استراتيجية من استراتيجيات الصف الواحد في جميع الصفوف، وهي على التوالي (7، 2-، 1).
- تطبيق معيار (MaxiMin) وذلك بأختيار أعظم قيمة (Max) من بين القيم الأقل عائد للصفوف في الخطوة السابقة وهي القيمة (7)، وهي تقابل الاستراتيجية (A_1) التي سيلعبها اللاعب (A) كأساس لمواجهة اللاعب الخصم (B).

٢. خطوات اللاعب (B):

- أختيار أكبر خسارة (Max) لكل استراتيجية من استراتيجيات العمود الواحد في جميع الأعمدة، وهي على التوالي (10، 9، 7).
- تطبيق معيار (MiniMax) وذلك بأختيار أقل خسارة (Min) من بين قيم الخسارات العظمى للأعمدة في الخطوة السابقة وهي القيمة (7)، وهي تقابل الاستراتيجية (B_3) التي سيلعبها اللاعب (B) كأساس لمواجهة الخصم (A).

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	9	7	(7) ← MaxiMin
A_2	3	2	−2	−2
A_3	5	4	1	1
Column Maximum	10	9	(7)	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أن الاستراتيجية الحرة لكل لاعب والقيمة المثلى للمباراة هي:

- MiniMax value = MaxiMin value = 7 (optimal strategies)
- The game value $(v^*) = 7$
- The saddle point in (A_1) & (B_3), that's mean in (1,3).

مثال (٦-٣): الجدول التالي يوضح كمية العائد الممكن الحصول عليه في حالة المنافسة بين فريقين (A) و (B). كون مصفوفة الدفع لهذهِ المسألة، ومن ثم أوجد قيمة المباراة.

Choices	Payments	Revenue
A_1 , B_1	B_1 give A_1 ➔ 5 units	5
A_1 , B_2	A_1 give B_2 ➔ 3 units	−3
A_1 , B_3	A_1 give B_3 ➔ 4 units	−4
A_2 , B_1	B_1 give A_2 ➔ 1 unit	1
A_2 , B_2	B_2 give A_2 ➔ 2 units	2
A_2 , B_3	A_2 give B_3 ➔ 4 units	−4

الحل: نكون مصفوفة الدفع للمسألة أعلاه التي تخص اللاعب (A) بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	5	−3	−4
A_2	1	2	−4

يُمكن حل المثال بتطبيق معيار (MiniMax) للاعب (B) و (MaxiMin) للاعب (A) والتي نحصل من خلالها على المصفوفة الآتية:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	−3	−4	(−4) ← MaxiMin
A_2	1	2	−4	(−4) ← MaxiMin
Column Maximum	5	2	(−4)	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أن للاعب (A) حق استخدام أحد الاستراتيجيتين (A_1) أو (A_2) مقابل الاستراتيجية الحرة الوحيدة (B_3) للاعب (B) وفي كلا الأحوال نحصل على الاستراتيجية المثلى لكل لاعب والقيمة المثلى للمباراة بالشكل الآتي:

- MiniMax value = MaxiMin value = −4 (optimal strategies)
- The game value $(v^*) = -4$
- The first saddle point in (A_1) & (B_3), that's mean in (1,3).
- The second saddle point in (A_2) & (B_3), that's mean in (2,3).

٦-٤ مباراة ذات الاستراتيجية المختلطة (Mixed Strategy)

للحصول على القيمة المثلى للمباراة (v^*) فيجب التحقق من حالة التوازن:

١. إذا تحققت حالة التوزان (v^* = MaxiMin value = MiniMax value)، فيمكن الحصول على الحل الأمثل للمباراة من خلال تطبيق استراتيجية حرة واحدة لكل لاعب.

٢. إذا لم تتحقق حالة التوازن (MiniMax value ≠ MaxiMin value) فيجب الخلط بين أكثر من استراتيجية للحصول على حالة التوازن وتكون قيمة المباراة المثلى ضمن المتباينة الآتية:

$$MaxiMin\,(A) \leq v \leq MiniMax\,(B)$$

حيث إن قيمة المعيار (MaxiMin) أقل من أو يساوي قيمة المعيار (MiniMax) بشكل دائم، أي يشترط تحقق المتباينة:

$$MiniMax \geq MaxiMin$$.

مثـال (٦-٤): أفتـرض لـدينا مبـاراة (Two-finger) بـين اللاعبـين (A) و (B) حيـث يجلسان بشكل متقابل على طاولة واحدة، وبالتزامن كلا يرفع يد واحدة ويظهران أصبع (I) أو أصبعين (II)، وفي حالة أن كلاهما أظهر نفس العدد من الأصابع فأن اللاعب (A) ربـح 2$ وبخلافـه (عندما يظهـر اللاعـب A أصـبع واحـد ويظهـر B أصـبعين أو العكس بالعكس) يربح (B) القيمة 2$. كون مصفوفة الدفع لهذهِ المسألة، ومن ثم إوجد قيمة المباراة[1].

الحل: نكون مصفوفة الدفع للمسألة أعلاه التي تخص اللاعب (A) بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	One finger (I)	Two finger (II)
One finger (I)	2	−2
Two finger (II)	−2	2

للحصول على الحل الأمثل لهذهِ المباراة، نقوم أولاً بأختبار وجود نقطة ارتكاز (Saddle point) ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كلا اللاعبين.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	One finger (I)	Two finger (II)	
One finger (I)	2	−2	−2
Two finger (II)	−2	2	−2
Column Maximum	2	2	

MaxiMin

MiniMax

(1) Rama Murthy P., , **Op. Cit**, p. 489.

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- MiniMax value ≠ MaxiMin value
- $MaxiMin = -2 \leq v \leq MiniMax = 2$

وبما أن قيمة المعيار (MaxiMin=−2) متشابة لكلا استراتيجيات اللاعب (A) وهي متشابهة أيضاً للاعب (B) ومقدارها (MiniMax=2)، عندها ستكون الاستراتيجيات المختارة لكلا اللاعبين هي أما $\left[\frac{A}{I}, \frac{B}{I}\right]$ أو $\left[\frac{A}{II}, \frac{B}{II}\right]$ أو بشكل مخالف لان ذلك لا يشكل أي تغيير أما $\left[\frac{A}{I}, \frac{B}{II}\right]$ أو $\left[\frac{A}{II}, \frac{B}{I}\right]$.

أما القيمة الفعلية للمباراة فيُمكن ايجادها عند عدم توفر نقطة ارتكاز محددة وذلك باستخدام أحدى طرق الحل للاستراتيجيات المختلطة التي سيتم الاشارة إليها لاحقاً.

٦-٥ الاستراتيجيات المسيطرة (مبدأ السيطرة)[1] (Dominance Strategies)

عندما تتوفر نقطة ارتكاز فإننا نختار الاستراتيجية الحرة لكل لاعب، وبخلافهِ تتكون لدينا استراتيجيات مختلطة، عندها يجب تقليص حجم مصفوفة الدفع من خلال حذف استراتيجيات معينة (صف أو عمود) لن تلعب أبداً، وذلك عن طريق تطبيق مبدأ السيطرة أو الهيمنة (Dominance)، حيثُ يُمكن أن نحذف استراتيجية أحد اللاعبين إذا كان لديه استراتيجية أخرى مسيطرة تحقق نتائج أفضل أو نفس النتائج، وهذا مناسب

(1) Ibid, p. 489.

لمباراة الشخصين ذات المجموع الصفري، وبعد تطبيق مبدأ السيطرة يمكننا حل المباراة باستخدام استراتيجية مختلطة أو حرة.

مثال (٦-٥): أفترض لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A)، هل بالأمكان تطبيق مبدأ السيطرة؟ ثم أوجد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	−7	−1	−8
A_2	−2	−5	4
A_3	−4	2	3

الحل:

١. نقوم أولاً باختبار وجود نقطة ارتكاز ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كل لاعب.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	−7	−1	−8	−8
A_2	−2	−5	4	−5
A_3	−4	2	3	(−4) ← MaxiMin
Column Maximum	(−2)	2	4	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- MiniMax value ≠ MaxiMin value
- $MaxiMin = -4 \leq v \leq MiniMax = -2$

2. نطبق مبدأ السيطرة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A) فإذا كانت جميع قيم أحد الصفوف أقل من أو تساوي القيم المقابلة لصف آخر فيمكن حذف الصف ذو القيم الأقل، لأن اللاعب (A) يبحث عن العائد الأكبر ولهذا يتم أستبعاد الصف ذو العائد الأقل.

✓ نقارن الصفوف A_1A_2 نُلاحظ أنه ليست جميع قيم صف A_1 أقل من A_2 أو العكس لهذا لا ينفع حذف أي منهما.

A_1	−7	−1	−8
A_2	−2	−5	4

✓ نقارن الصفوف A_1A_3 نُلاحظ أنه جميع قيم صف A_1 أقل من جميع عناصر صف A_3 المناظرة لها، لهذا نحذف صف A_1 لأنه مسيطر عليه من قبل عناصر صف A_3.

A_1	−7	−1	−8
A_3	−4	2	3

أصبحت مصفوفة الدفع تتضمن صفين هما A_2 و A_3 فقط.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_2	−2	−5	4
A_3	−4	2	3

- نبدأ بأعمدة اللاعب (B) فإذا كانت جميع قيم أحد الأعمدة أكبر من أو تساوي القيم المقابلة لعمود آخر فيمكن حذف العمود ذو القيم الأكبر لأن اللاعب (B) يحاول الحفاظ على الاستراتيجية التي تقلل خسائره.

✓ نقارن الأعمدة B_1B_2 لا ينفع حذف أحدهما لأنه ليس جميع قيم عمود B_1 أكبر من B_2 أو العكس.

B_1	B_2
-2	-5
-4	2

✓ نقارن الأعمدة B_1B_3 نُلاحظ أن جميع عناصر عمود B_3 أكبر من العناصر التي تناظرها في عمود B_1 لهذا يتم حذف العمود ذو العناصر الأكبر وهو B_3.

B_1	B_3
-2	4
-4	3

أصبحت مصفوفة الدفع تتضمن عمودين فقط هما B_1 و B_2.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_2	-2	-5
A_3	-4	2

٣. نقوم باختبار وجود نقطة ارتكاز مرة ثانية:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	B_1	B_2	
A_2	−2	−5	−5
A_3	−4	2	(−4) ← MaxiMin
Column Maximum	(−2)	2	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- Minimax value ≠ Maximin value
- $MaxiMin = -4 \leq v \leq MiniMax = -2$

يُمكن ايجاد القيمة الفعلية للمباراة باستخدام أحدى طرق الحل للاستراتيجيات المختلطة التي سيتم الاشارة أليها لاحقاً.

٦-٦ مبدأ معدل الاستراتيجيات (Average of Strategies)

عندما لا تتوفر لدينا استراتيجية حرة (عدم وجود نقطة ارتكاز محددة) فإننا نعمد إلى تقليص حجم مصفوفة الدفع إلى الحجم (2×2) وذلك بتطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة، وعندما لا تنفع الأخيرة فإننا نحاول تطبيق مبدأ معدل الاستراتيجيات، وذلك بأن نختبر امكانية وجود احدى الاستراتيجيات قد يكون مسيطراً عليها من قبل معدل استراتيجيتين أو أكثر عندها نطبق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة ونطبق عليها نفس الشروط السابقة بالنسبة للأعمدة والصفوف.

مثـال (٦-٦): أفترض لـديك مصـفوفة الـدفع التاليـة التـي تخـص اللاعـب (A)، هل بالأمكان تطبيق مبدأ السيطرة؟ ثم أوجد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	−6	−2	0
A_2	−1	−3	−9
A_3	−3	4	−7

الحل:

١. نقوم أولاً باختبار وجود نقطة ارتكاز ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كل لاعب.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	−6	−2	0	−6
A_2	−1	−3	−9	−9
A_3	−3	4	−4	(−4) ← MaxiMin
Column Maximum	(−1)	4	0	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- MiniMax value ≠ MaxiMin value
- $MaxiMin = -4 \leq v \leq MiniMax = -1$

2. نطبق مبدأ السيطرة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A):
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_2 نُلاحظ أنه لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_3 لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الصفوف A_2A_3 لا ينفع حذف أي منهما.
- نقارن أعمدة اللاعب (B):
  - ✓ نقارن الأعمدة B_1B_2 نُلاحظ أنه لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الأعمدة B_1B_3 لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الأعمدة B_2B_3 لا ينفع حذف أي منهما.

3. من أعلاه نُلاحظ أنه لا ينفع تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة لتقليص حجم مصفوفة الدفع، لهذا نحاول تطبيق مبدأ معدل الاستراتيجيات، وذلك بأخذ معدل أول استراتيجيتين وهما A_1 و A_2 ونقارنها مع الاستراتيجية الثالثة A_3 :

$\frac{A_1 + A_2}{2}$	$\frac{-6-1}{2} = -3.5$	$\frac{-2-3}{2} = -2.5$	$\frac{0-9}{2} = -4.5$
A_3	−3	4	−4

بما أن جميع قيم صف A_3 مسيطرة على صف المعدل، لهذا يتم حذف الاستراتيجيتين A_1 و A_2 لأنه مسيطر عليهما من قبل A_3، وتصبح مصفوفة الدفع بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_3	−3	4	−4	(−4) ← MaxiMin
Column Maximum	−3	4	(−4)	

MiniMax

بعد تطبيق مبدأ معدل الاستراتيجيات نُلاحظ أن:

- MiniMax value = MaxiMin value
- $v^* = -4$

وأن قيمة المباراة (4-) تعني أن اللاعب (B) قد كسب 4 وحدات من اللاعب (A).

٦-٧ طرق حل مباراة ذات الاستراتيجيات المختلطة

الخطوة الأولى لايجاد قيمة المباراة هي التحقق من وجود نقطة ارتكاز من عدمهِ، فإذا وجدت فتلك هي قيمة المباراة، وبخلافهِ فإننا نعتمد على تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة أو معدل الاستراتيجيات وذلك لتقليل حجم المباراة قدر الامكان والذي قد يؤدي للحصول على نقطة ارتكاز كما في مثال (٦-٦) السابق، وأذا لم تفلح تلك الطرق للحصول على قيمة محددة للمباراة (الحصول على استراتيجية حرة) كما في مثال (٦-٥) الذي تم الاشارة إليه سابقاً، فيتم تطبيق طرق الحل التالية كون المباراة ذات استراتيجيات مختلطة:

٦-٧-١ الطريقة الحسابية (Arithmetic Method)

تستخدم هذهِ الطريقة في حالة عدم امتلاك قيمة محددة للمباراة ذات الحجم (2×2)، كذلك تستخدم لإيجاد الاستراتيجيات المثلى لكل لاعب وذلك باتباع الخطوات الآتية:

١. ايجاد ملاحق اللاعب (B): وهي مقدار التكرارات التي سيتبعها اللاعب (B) بالنسبة إلى استراتيجياتهِ.

- تطرح القيمة الأولى من القيمة الثانية في العمود الأول ويكتب الناتج تحت العمود الثاني مع إهمال الإشارات.
- تطرح القيمة الأولى من القيمة الثانية في العمود الثاني ويكتب الناتج تحت العمود الأول مع إهمال الإشارة.

2. ايجاد ملاحق اللاعب (A) وذلك بتطبيق نفس الخطوات أعلاه بالنسبة للصفوف.

مثال (٦-٧): بالرجوع إلى مثال (٦-٤)، نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة كانت $(MaxiMin = -2 \leq v \leq MiniMax = 2)$ وأن مصفوفة الدفع بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	One finger (I)	Two finger (II)
One finger (I)	2	-2
Two finger (II)	-2	2

المطلوب استخدام الطريقة الحسابية لإيجاد قيمة المباراة.

الحل:

١. ايجاد ملاحق اللاعب (A) و (B):

ملاحق (A) للصفوف	ملاحق (B) للأعمدة
$\|2-(-2)\| = 4$ $\|-2-2\| = 4$	$\|2-(-2)\| = 4$ $\|-2-2\| = 4$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		ملاحق (A)
	One finger (I)	Two finger (II)	
One finger (I)	2	−2	4
Two finger (II)	−2	2	4
ملاحق (B)	4	4	8

٢. ايجاد القيمة الاحتمالية لكل استراتيجية وذلك بتقسيم الملاحق لكل لاعب على مجموع تلك الملاحق:

- القيم الاحتمالية لملاحق (A): $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
- القيم الاحتمالية لملاحق (B): $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

٣. الاستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين هي:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ I & II & I & II \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية (I) بأحتمال $\frac{1}{2}$ من الوقت ويعتمد على الاستراتيجية (II) بأحتمال $\frac{1}{2}$ الوقت المتبقي، وبنفس الشكل مع اللاعب (B).

٤. باستخدام ملاحق (A):

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (I) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{للصف الأول } A \text{ قيمة الملحق} + a_{21} \times \text{للصف الثاني } A \text{ قيمة الملحق}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{2\times 4 + (-2)\times 4}{8} = 0$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(2 \le 0 \le -2)$، ومن الممكن التوقف عند هذه المرحلة وتنتهي المسألة لأنهُ تم الحصول

على قيمة المباراة، أو يُمكن الاستمرار في حساب قيمة المباراة للتأكد من صحة القيمة أعلاه.

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (II) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{12} \times \text{قيمة الملحق } A \text{ للصف الأول} + a_{22} \times \text{قيمة الملحق } A \text{ للصف الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{-2 \times 4 + 2 \times 4}{8} = 0$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(2 \leq 0 \leq -2)$.

٥. باستخدام ملاحق (B):

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (I) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الأول} + a_{12} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{2 \times 4 + (-2) \times 4}{8} = 0$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(2 \leq 0 \leq -2)$.

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (II) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{21} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الأول} + a_{22} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{-2 \times 4 + 2 \times 4}{8} = 0$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(2 \leq 0 \leq -2)$.

حيثُ نُلاحظ أنه يجب أن تكون جميع قيم المباراة التي تم الحصول عليها من استخدام جميع الملاحق تكون متساوية وهي $(v^* = 0)$، وهذا يعني أن اللاعب (A) سيكسب (0) وحدة من اللاعب (B) الذي بدورة سيخسر (0) وحدة لصالح (A).

مثال (٦-٨): استخدم الطريقة الحسابية لإيجاد قيمة المباراة لمثال (٦-٥).

الحل: أن مصفوفة الدفع لمثال (٦-٥) بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_2	-2	-5
A_3	-4	2

أما قيمة المباراة فكانت ضمن الفترة: $MaxiMin = -4 \leq v \leq MiniMax = -2$

١. ايجاد ملاحق اللاعب (A) و (B):

ملاحق (A) للصفوف	ملاحق (B) للأعمدة
$\|-2-(-5)\| = 3$ $\|-4-2\| = 6$	$\|-2-(-4)\| = 2$ $\|-5-2\| = 7$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		ملاحق (A)
	B_1	B_2	
A_2	-2	-5	6
A_3	-4	2	3
ملاحق (B)	7	2	9

٢. ايجاد القيمة الاحتمالية لكل استراتيجية:

- القيم الاحتمالية لملاحق (A): $\frac{6}{9} = 0.67, \frac{3}{9} = 0.33$
- القيم الاحتمالية لملاحق (B): $\frac{7}{9} = 0.78, \frac{2}{9} = 0.22$

٣. الاستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين هى:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_2 & A_3 & B_1 & B_2 \\ 0.67 & 0.33 & 0.78 & 0.22 \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية (A_2) باحتمال (0.67) من وقت المباراة ويلعب الاستراتيجية (A_3) باحتمال (0.33) من الوقت المتبقي، وبنفس المبدأ مع اللاعب (B).

٤. باستخدام ملاحق (A):

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (B_1) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{-2 \times 6 + (-4) \times 3}{9} = \frac{-12 - 12}{9} = \frac{-24}{9} = -2.67$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة ($-2 \leq -2.67 \leq -4$)، ويُمكن التوقف في هذه المسألة لحصولنا على القيمة المثلى للمباراة أو الاستمرار للتأكد من صحتها.

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (B_2) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{-5 \times 6 + 2 \times 3}{9} = \frac{-24}{9} = -2.67$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة ($-2 \leq -2.67 \leq -4$).

٥. باستخدام ملاحق (B):

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (A_2) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{-2 \times 7 + (-5) \times 2}{9} = \frac{-24}{9} = -2.67$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(-2 \leq -2.67 \leq -4)$.

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (A_3) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{-4 \times 7 + 2 \times 2}{9} = \frac{-24}{9} = -2.67$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(-2 \leq -2.67 \leq -4)$.

إن قيمة المباراة هي $(v^* = -2.67)$، وهذا يعني أن اللاعب (A) سيخسر (2.67) وحدة للاعب (B) الذي يعتبر الرابح في هذه المباراة بمقدار (2.67) وحدة.

٦-٧-٢ الطريقة الجبرية (Algebraic Method):

تعتبر الطريقة الثانية لإيجاد قيمة المباراة في حالة عدم وجود نقطة ارتكاز، وتستخدم هذه الطريقة لتحديد مقدار الوقت الذي سيتم فيه استخدام كل استراتيجية، كذلك لإيجاد الاستراتيجية المثلى لكل لاعب في مباراة ذات الحجم (2×2)، ويتم ذلك من خلال تحديد جزء من الوقت لاستخدام الاستراتيجية الواحدة من قبل كل لاعب بحيث تكون الأرباح أو الخسائر المتوقعة للاعب متساوية بغض النظر عن الاستراتيجية المختارة من اللاعب الخصم.

مثال (٦-٩): استخدم الطريقة الجبرية لإيجاد قيمة المباراة لمثال (٦-٥).

الحل:

١. بالرجوع إلى مثال (٦-٥) فإنه لم تكن هنالك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة كانت ضمن الفترة $MaxiMin = -4 \leq v \leq MiniMax = -2$ وأن مصفوفة الدفع بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_2	−2	−5
A_3	−4	2

٢. قواعد تطبيق الطريقة الجبرية:

- يستخدم اللاعب (A) الاستراتيجيات المتاحة لديه A_2 و A_3 باحتمال p_2 و p_3 على التوالي علماً أن: $p_2 + p_3 = 1 \rightarrow p_3 = 1 - p_2$ ، وبنفس الاسلوب يستخدم اللاعب (B) الاستراتيجيات المتاحة لديه B_1 و B_2 باحتمال q_1 و q_2 على التوالي علماً أن: $q_1 + q_2 = 1 \rightarrow q_2 = 1 - q_1$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	
A_2	−2	−5	p_2
A_3	−4	2	p_3
	q_1	q_2	

- <u>أرباح اللاعب (A):</u>

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_1):

$$-2p_2 - 4(1 - p_2) = -2p_2 - 4 + 4p_2 = 2p_2 - 4 \quad \dots(1)$$

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_2):

$$-5p_2 + 2(1 - p_2) = -5p_2 + 2 - 2p_2 = 2 - 7p_2 \quad \dots(2)$$

يتم مساواة القيم الاحتمالية لاستراتيجيات اللاعب (B) لأنه ليس هناك فرق بالنسبة للاعب (A)

بأي استراتيجية سيلعب الخصم (B) أي أن:

$(1) = (2)$

$$2p_2 - 4 = 2 - 7p_2 \rightarrow 2p_2 + 7p_2 = 2 + 4 \rightarrow 9p_2 = 6 \rightarrow p_2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore p_3 = (1 - p_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية A_2 بـ$(\frac{2}{3})$ من وقت المباراة ويلعب الاستراتيجية A_3 بـ$(\frac{1}{3})$ من الوقت المتبقي للمباراة، بحيث يحقق الأرباح نفسها بغض النظر عن الاستراتيجية المختارة من قبل اللاعب (B).

✓ نعوض قيمة p_2 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 2p_2 - 4 = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 4 = -2.67$$

$$-4 \leq -2.67 \leq -2$$

✓ أو نعوض قيمة p_2 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 2 - 7p_2 = 2 - 7\left(\frac{2}{3}\right) = -2.67$$

$$-4 \leq -2.67 \leq -2$$

- <u>خسائر اللاعب (B):</u>

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_2):

$$-2q_1 - 5(1 - q_1) = -2q_1 - 5 + 5q_1 = 3q_1 - 5 \quad \ldots(1)$$

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_3):

$$-4q_1 + 2(1 - q_1) = -4q_1 + 2 - 2q_1 = 2 - 6q_1 \quad \ldots(2)$$

يتم مساواة القيم الاحتمالية لاستراتيجيات اللاعب (A) لأنه ليس هناك فرق بالنسبة للاعب (B)

بأي استراتيجية سيلعب الخصم (A) أي أن:

$(1) = (2)$

$$3q_1 - 5 = 2 - 6q_1 \rightarrow 3q_1 + 6q_1 = 2 + 5 \rightarrow 9q_1 = 7 \rightarrow q_1 = \frac{7}{9}$$

$$\therefore q_2 = (1 - q_1) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

✓ نعوض قيمة q_1 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 3q_1 - 5 = 3\left(\frac{7}{9}\right) - 5 = -2.67$$

$$-4 \leq -2.67 \leq -2$$

✓ أو نعوض قيمة q_1 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 2 - 6q_1 = 2 - 6\left(\frac{7}{9}\right) = -2.67$$

$$-4 \leq -2.67 \leq -2$$

- يُمكن تلخيص مقدار الأوقات التي سيتم استخدامها من قبل كل لاعب بالمصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_2 & A_3 & B_1 & B_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad and \quad v^* = -2.67$$

مثال (٦-١٠): استخدم الطريقة الجبرية لإيجاد القيمة المثلى للمباراة والوقت المطلوب لاستخدام كل استراتيجية إذا كانت لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A):

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0	−2	2
A_2	5	4	−3
A_3	2	3	−4

الحل:

١. نبحث عن نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0	−2	2	(−2) ← MaxiMin
A_2	5	4	−3	−3
A_3	2	3	−4	−4
Column Maximum	5	4	(2)	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة كانت ضمن الفترة:

$$MaxiMin = -2 \leq v \leq MiniMax = 2$$

٢. لاستخدام الطريقة الجبرية يجب أن يكون حجم المباراة (2×2) لهذا نحاول تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A):
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_2 لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_3 لا ينفع.
  - ✓ نقارن الصفوف A_2A_3 نُلاحظ أن جميع قيم صف A_2 أكبر من قيم A_3 لهذا يحذف صف A_3 لأنه مسيطر عليه من قبل A_2، وأصبحت المصفوفة بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0	−2	2
A_2	5	4	−3

- نقارن أعمدة اللاعب (B):

✓ نقارن B_1B_2 نُلاحظ أن جميع قيم عمود B_2 أقل من قيم عمود B_1 لهذا يحذف عمود B_1 لأنه مسيطر عليه من قبل B_2، وأصبحت المصفوفة بالحجم النهائي (2×2) التالي حيث ليس هناك أي إمكانية للتقليص.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	B_2	B_3	
A_1	−2	2	(−2) ← MaxiMin
A_2	4	−3	−3
Column Maximum	4	(2)	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة $(-2 \leq v \leq 2)$.

٣. نطبق الطريقة الجبرية:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_2	B_3	
A_1	−2	2	p_1
A_2	4	−3	p_2
	q_2	q_3	

- أرباح اللاعب (A):

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_2):

$$-2p_1 + 4(1-p_1) = -2p_1 + 4 - 4p_1 = 4 - 6p_1 \quad \dots(1)$$

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_3):

$$2p_1 - 3(1-p_1) = 2p_1 - 3 + 3p_1 = 5p_1 - 3 \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$4 - 6p_1 = 5p_1 - 3 \rightarrow 5p_1 + 6p_1 = 4 + 3 \rightarrow p_1 = \frac{7}{11}$$

$$\therefore p_2 = (1-p_1) = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية A_1 بـ($\frac{7}{11}$) من وقت المباراة ويلعب الاستراتيجية A_2 بـ($\frac{4}{11}$) من الوقت المتبقي للمباراة، بحيث يحقق الأرباح نفسها بغض النظر عن الاستراتيجية المختارة من قبل اللاعب (B).

✓ نعوض قيمة p_1 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 4 - 6p_1 = 4 - 6\left(\frac{7}{11}\right) = 0.2$$

$$-2 \leq 0.2 \leq 2$$

✓ أو نعوض قيمة p_1 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 5p_1 - 3 = 5\left(\frac{7}{11}\right) - 3 = 0.2$$

$$-2 \leq 0.2 \leq 2$$

- خسائر اللاعب (B):

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_1):

$$-2q_2 + 2(1-q_2) = -2q_2 + 2 - 2q_2 = 2 - 4q_2 \quad \dots(1)$$

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_2):

$$4q_2 - 3(1-q_2) = 4q_2 - 3 + 3q_2 = 7q_2 - 3 \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$2 - 4q_2 = 7q_2 - 3 \rightarrow 7q_2 + 4q_2 = 2 + 3 \rightarrow q_2 = \frac{5}{11}$$

$$\therefore q_3 = (1 - q_2) = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$$

✓ نعوض قيمة q_2 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 2 - 4q_2 = 2 - 4\left(\frac{5}{11}\right) = 0.2$$

$$-2 \leq 0.2 \leq 2$$

✓ أو نعوض قيمة q_2 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 7q_2 - 3 = 7\left(\frac{5}{11}\right) - 3 = 0.2$$

$$-2 \leq 0.2 \leq 2$$

- يُمكن تلخيص مقدار الأوقات التي سيتم استخدامها من قبل كل لاعب بالمصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_1 & A_2 & B_2 & B_3 \\ \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \quad and \quad v^* = 0.2$$

٦-٧-٣ طريقة الرسم البياني (Graphical Method):

تعتبر الطريقة الثالثة لإيجاد قيمة المباراة في حالة عدم وجود نقطة ارتكاز في مباراة ذات الاستراتيجية المختلطة، بشرط أن يكون حجم مصفوفة الدفع إما (2×n) أو (m×2)، أي يكون لأحد اللاعبين استراتيجيتين فقط متاحة لهُ مقابل الخصم ذو الاستراتيجيات المتعددة، وتكون قيمة المباراة المستخرجة للاعب الذي يملك الاستراتيجيتين فقط.

مثال (٦-١١): استخدم طريقة الرسم لإيجاد القيمة المثلى للمباراة لمصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A) ذات الحجم (2×4):

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	−1
A_2	4	3	2	6

الحل:

١. نبحث عن نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy				Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	2	3	−1	−1
A_2	4	3	2	6	(2) ← MaxiMin
Column Maximum	4	(3)	3	6	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة كانت ضمن الفترة:

$$MaxiMin = 2 \leq v \leq MiniMax = 3$$

٢. نحاول تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة لتقليص حجم المباراة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A) حيث لا يُمكن حذف أي منهما.
- أما أعمدة اللاعب (B) فنقارن بين B_1B_2 حيثُ يُمكن حذف عمود B_1 لأنه مسيطر عليه من قبل B_2، ولا يُمكن إجراء أي تقليص آخر حتى في حالة تطبيق مبدأ معدل الاستراتيجيات وأصبحت المصفوفة بالحجم النهائي (2×3) الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	−1
A_2	3	2	6

٣. تطبيق قواعد طريقة الرسم البياني:

- نخصص الرموز الاحتمالية p_1 و p_2 للاعب (A) كونه يملك استراتيجيتين فقط هما A_1 و A_2 حيثُ $p_2 = 1 - p_1$ ← $p_1 + p_2 = 1$ ، أما اللاعب (B) فيخصص لهُ q_2 و q_3 و q_4 لامتلاكهِ ثلاث استراتيجيات هي B_2 و B_3 و B_4 على التوالي حيثُ $q_2 + q_3 + q_4 = 1$.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			
	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	−1	p_1
A_2	3	2	6	p_2
	q_2	q_3	q_4	

- يُحاول اللاعب (A) زيادة أرباحهِ من خلال جعل قيمة المباراة (v) أكبر ما يُمكن فيما أذا طبق اللاعب (B) مختلف استراتيجياتهِ الحرة كالآتي:

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_2:

$$2p_1 + 3p_2 \geq v \rightarrow 2p_1 + 3(1 - p_1) \geq v \rightarrow 3 - p_1 \geq v \ \dots (1)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_3:

$$3p_1 + 2p_2 \geq v \rightarrow 3p_1 + 2(1 - p_1) \geq v \rightarrow 2 + p_1 \geq v \ \dots (2)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_4:

$$-p_1 + 6p_2 \geq v \rightarrow -p_1 + 6(1 - p_1) \geq v \rightarrow 6 - 7p_1 \geq v \ \dots (3)$$

يُمكن إدراج المتباينات الثلاث أعلاه والتي تُمثل القيم المتوقعة للاعب (A) بالجدول الآتي:

القيمة المتوقعة للاعب (A)	الاستراتيجيات الحرة للاعب (B)
$3 - p_1$	B_2
$2 + p_1$	B_3
$6 - 7p_1$	B_4

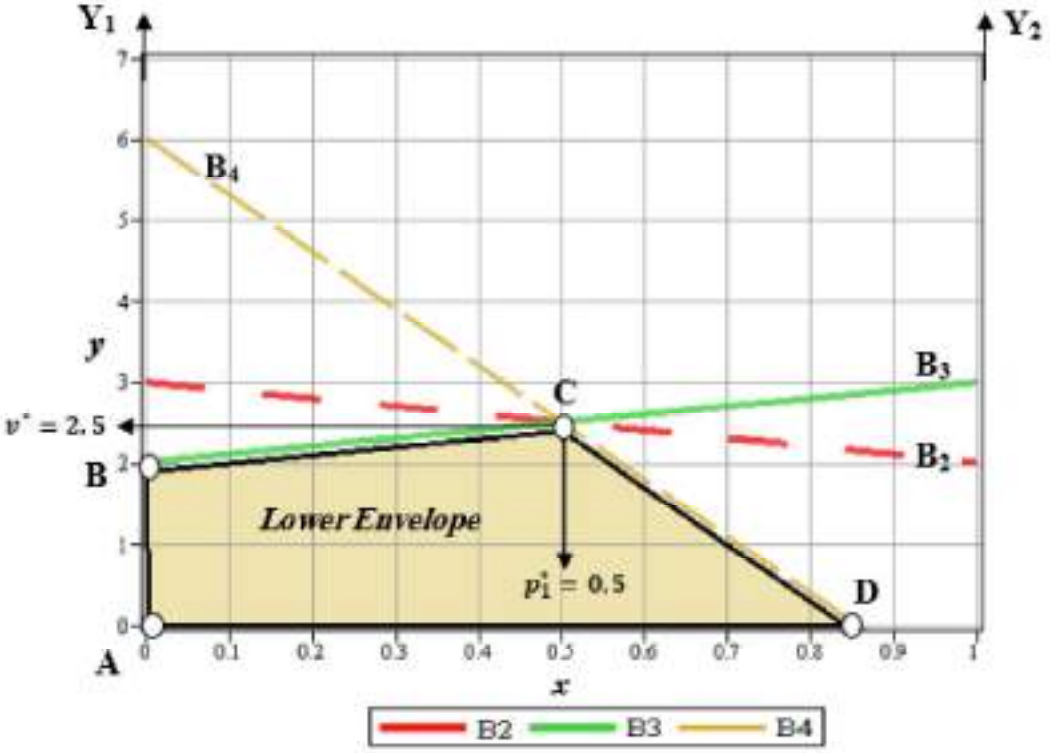
ان اللاعب (A) يتوقع وفق مبدأ (MaxiMin) أنهُ سيحصل على أدنى الأرباح (Minimum) وبالتالي يحاول أختيار أفضل (أكبر Maximum) ربح من بين هذهِ الأرباح السيئة.

يتم تحديد القيمة المثلى للمباراة وذلك برسم المستقيمات الثلاث الموضحة بالجدول أعلاه كما في شكل (٦-٢) التالي:

- ✓ نرسم المحور الأفقي (x) وهو يُمثل احتمال اختيار الاستراتيجية $(0 \le p_1 \le 1)$.
- ✓ ثم نرسم محورين لـ(Y) عموديين على محور (x)، الأول عند النقطة $(p_1=0)$ وهو يُمثل الاستراتيجية الأولى A_1 والعمود الثاني عند النقطة $(p_1=1)$ وهو يُمثل الاستراتيجية الثانية A_2.

استراتيجيات اللاعب (B)	معادلة المستقيم	قيمة Y_1 عندما $p_1=0$	قيمة Y_2 عندما $p_1=1$
B_2	$3 - p_1$	3-(0)=3 (0,3)	3-(1)=2 (1,2)
B_3	$2 + p_1$	2+(0)=2 (0,2)	2+(1)=3 (1,3)
B_4	$6 - 7p_1$	6-7(0)=6 (0,6)	6-7(1)=-1 (1,-1)

نأخذ مثلاً معادلة الاستراتيجية B_2 والتي تملك النقطة (0,3) على محور Y_1 والنقطة (1,2) على محور Y_2 ونرسم الخط المستقيم الواصل بينهما، ونفس الاسلوب مع معادلات الاستراتيجيات B_3 و B_4.



شكل (٦-٢) يوضح منطقة الحل المقبول للاعب (A)

- ✓ أن منطقة تقاطع المستقيمات الثلاثة للاعب (B) شكلت المنطقة المظللة ذات الزوايا (ABCD) باتجاه المحور الأفقي والتي قد تدعى أيضاً بالجيب الأسفل للمباراة (Lower Envelope) ، وهي تُمثل منطقة الحل المقبول للاعب (A) ولأنهُ يبحث عن أكبر عائد متوقع، لهذا نختار أعلى نقطة في تلك المنطقة وهي النقطة C والتي تُمثل نقطة (MaxiMin) لهذهِ المباراة وقد جاءت من تقاطع المستقيمات الثلاث، حيثُ يُمثل الأحداثي السيني لنقطة

C قيمة $p_1=0.5$ ومنه نستخرج $p_2=1-p_1=0.5$، أما الأحداثي الصادي فيمثل القيمة المثلى للمباراة ($v^* = 2.5$).

- ✓ يُمكن الحصول على قيمة المباراة وذلك بتعويض قيمة $p_1=0.5$ في أحد المستقيمات المتقاطعة والتي شكلت نقطة (MaxiMin) كما مبين أدناه:

$$v^* = \begin{Bmatrix} 3 - p_1 = 3 - 0.5 = 2.5 \leftarrow \text{من معادلة الاستراتيجية } B_2 \\ 2 + p_1 = 2 + 0.5 = 2.5 \leftarrow \text{من معادلة الاستراتيجية } B_3 \\ 6 - 7p_1 = 6 - 7(0.5) = 2.5 \leftarrow \text{من معادلة الاستراتيجية } B_4 \end{Bmatrix}$$

مُلاحظة (٦-١): يُمكن ايجاد قيمة p_1 من مساواة معادلات أي استراتيجيتين إلى (B) والتي شكلت نقطة تقاطع المستقيمات، مثال ذلك:

$$3 - p_1 = 2 + p_1 \rightarrow 2p_1 = 1 \rightarrow p_1 = 0.5$$

من هذا نستنتج أن اللاعب (A) يُفضل استخدام الاستراتيجية A_1 و A_2 باحتمال 0.5 و 0.5 على التوالي للحصول على القيمة المثلى للمباراة (أعلى ربح متوقع) مساوي إلى ($v^* = 2.5$).

مُلاحظة (٦-٢): يُمكن أنهاء المسالة عند هذه المرحلة بعد حصولنا على قيمة المباراة، وفي حالة الرغبة بمعرفة القيم الاحتمالية الخاصة باستراتيجيات اللاعب (B) فيُمكن الاستمرار كما يلي:

- بإمكان اللاعب (B) أن ينافس خصمه (A) من خلال الاستراتيجيات الثلاث التي شكلت نقطة (MaxiMin) للاعب (A)، بشرط أن يتم أخذ استراتيجيتين فقط

في كل مرة مع افتراض الثالثة مساوية للصفر (هذهِ حالة خاصة بسبب أن نقطة (MaxiMin) جاءت من تقاطع ثلاث مستقيمات في آن واحد، ولهذا تأخذ كل التوافيق (Combinations) المتاحة، والحالة الاعتيادية أن هذهِ النقطة تأتي من تقاطع مستقيمين فقط)، حيثُ يُحاول اللاعب (B) تقليل خسائرهِ من خلال جعل قيمة (v) أصغر ما يمكن إذا طبق اللاعب (A) مختلف استراتيجياتهِ المتاحة كما يلي:

☒ يلعب (B) الاستراتيجيات B_2 و B_3 مع أهمال B_4

$q_2 + q_3 = 1 \rightarrow q_3 = 1 - q_2$ where $q_4 = 0$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_2	B_3	
A_1	2	3	p_1
A_2	3	2	p_2
	q_2	q_3	

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) نتيجة لاختيار اللاعب (A) لاستراتيجيته الحرة A_1:

$$2q_2 + 3q_3 \leq v \rightarrow 2q_2 + 3(1 - q_2) \leq v \rightarrow 3 - q_2 \leq v \quad \dots(1)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) نتيجة لاختيار اللاعب (A) لاستراتيجيته الحرة A_2:

$$3q_2 + 2q_3 \leq v \rightarrow 3q_2 + 2(1 - q_2) \leq v \rightarrow 2 + q_2 \leq v \quad \dots(2)$$

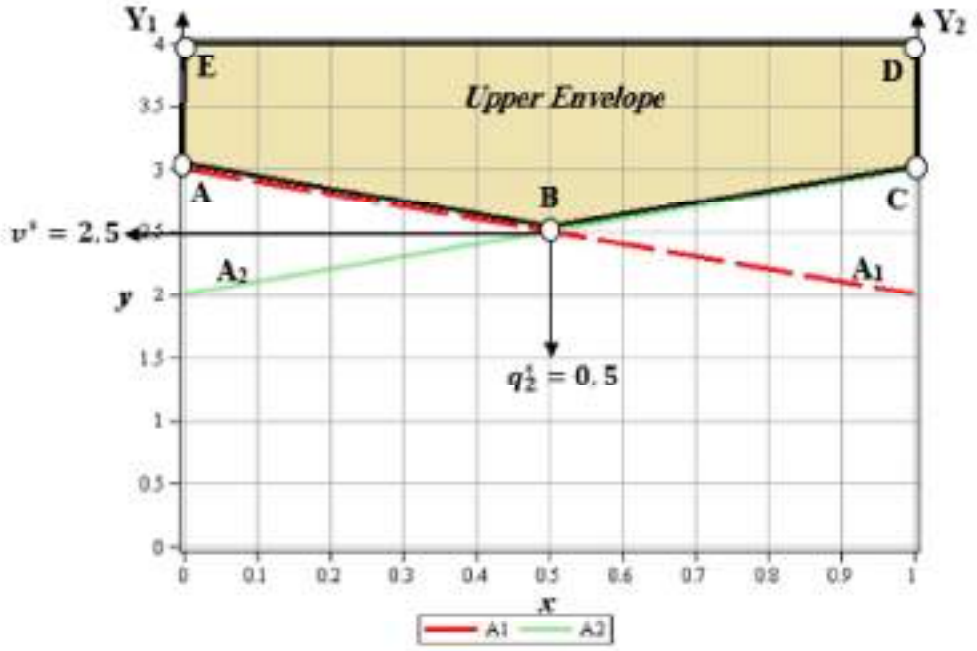
يُمكن إدراج المتباينتين أعلاه والتي تُمثل القيم المتوقعة للاعب (B) بالجدول الآتي:

الاستراتيجيات الحرة للاعب (A)	القيمة المتوقعة للاعب (B)
A_1	$3 - q_2$
A_2	$2 + q_2$

يتم تحديد القيمة المثلى للمباراة وذلك برسم المستقيمين الموضحة بالجدول أعلاه كما في شكل (٦-٣) التالي:

- ✓ نرسم المحور الأفقي (x) وهو يُمثل احتمال اختيار الاستراتيجية $(0 \le q_2 \le 1)$.
- ✓ نرسم محورين لـ(Y) عموديين على محور (x)، الأول عند النقطة $(q_2=0)$ وهو يُمثل الاستراتيجية الثانية B_2 والعمود الثاني عند النقطة $(q_2=1)$ وهو يُمثل الاستراتيجية الثالثة B_3.

استراتيجيات اللاعب (A)	معادلة المستقيم	قيمة Y_1 عندما $q_2=0$	قيمة Y_2 عندما $q_2=1$
A_1	$3 - q_2$	3-(0)=3 (0,3)	3-(1)=2 (1,2)
A_2	$2 + q_2$	2+(0)=2 (0,2)	2+(1)=3 (1,3)



شكل (٦-٣) يوضح منطقة الحل المقبول للاعب (B)

- ✓ أن منطقة تقاطع المستقيمين للاعب (A) شكلت المنطقة العلوية المظللة ذات الزوايا (ABCDE) والتي قد تدعى أيضاً بالجيب العلوي للمباراة (Upper Envelope) ، وهي تُمثل منطقة الحل المقبول للاعب (B) ولأنهُ يبحث عن أقل خساره ممكنة، لهذا نختار أدنى نقطة في تلك المنطقة وهي النقطة B والتي تُمثل نقطة (MiniMax) لهذهِ المباراة، حيثُ يُمثل الأحداثي السيني لنقطة B قيمة $q_2=0.5$ ومنها نستخرج قيمة $q_3=1-q_2=0.5$، أما الأحداثي الصادي فيمثل القيمة المثلى للمباراة $(v^* = 2.5)$.
- ✓ يُمكن الحصول على قيمة المباراة وذلك بتعويض قيمة $q_2=0.5$ في أحد المستقيمات المتقاطعة والتي شكلت نقطة (MiniMax) كما مبين أدناه:

$$v^* = \begin{Bmatrix} 3 - q_2 = 3 - 0.5 = 2.5 \leftarrow \text{من معادلة الاستراتيجية } A_1 \\ 2 + q_2 = 2 + 0.5 = 2.5 \leftarrow \text{من معادلة الاستراتيجية } A_2 \end{Bmatrix}$$

من هذا نستنتج أن اللاعب (B) يُفضل استخدام الاستراتيجية B_2 و B_3 باحتمال 0.5 و 0.5 على التوالي وثبات احتمال $q_4=0$ للاستراتيجية B_4 المهملة، للحصول على القيمة المثلى للمباراة (أدنى خسارة ممكنة) مساوي إلى $(v^* = 2.5)$.

☒ هناك حل بديل أول عندما يلعب (B) الاستراتيجيات B_3 و B_4 مع اهمال B_2

$q_3 + q_4 = 1 \rightarrow q_4 = 1 - q_3$ where $q_2 = 0$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_3	B_4	
A_1	3	-1	p_1
A_2	2	6	p_2
	q_3	q_4	

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) نتيجة لاختيار اللاعب (A) لاستراتيجيته الحرة A_1:

$$3q_3 - q_4 \leq v \rightarrow 3q_3 - (1 - q_3) \leq v \rightarrow 4q_3 - 1 \leq v \quad \dots(1)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) نتيجة لاختيار اللاعب (A) لاستراتيجيته الحرة A_2:

$$2q_3 + 6q_4 \leq v \rightarrow 2q_3 + 6(1 - q_3) \leq v \rightarrow 6 - 4q_3 \leq v \quad \dots(2)$$

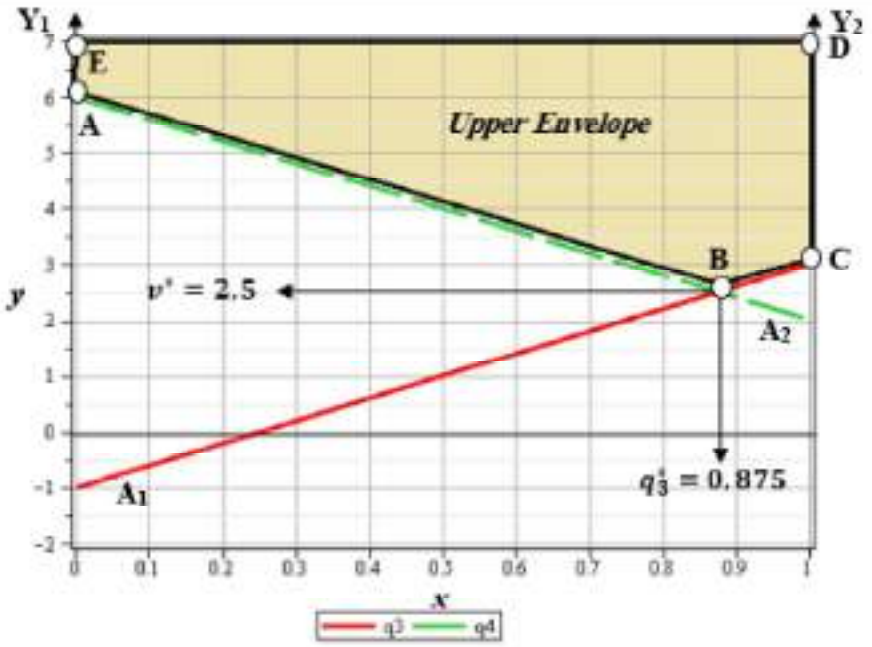
يُمكن إدراج المتباينتين أعلاه والتي تُمثل القيم المتوقعة للاعب (B) بالجدول الآتي:

الاستراتيجيات الحرة للاعب (A)	القيمة المتوقعة للاعب (B)
A_1	$4q_3 - 1$
A_2	$6 - 4q_3$

يتم تحديد القيمة المثلى للمباراة وذلك برسم المستقيمين الموضحة بالجدول أعلاه كما في شكل (٦-٤) التالي:

- ✓ نرسم محور (x) وهو يُمثل احتمال اختيار الاستراتيجية ($0 \le q_3 \le 1$).
- ✓ نرسم محورين لـ(Y)، الأول عند النقطة (q_3=0) وهو يُمثل الاستراتيجية الثالثة B_3 والعمود الثاني عند النقطة (q_3=1) وهو يُمثل الاستراتيجية الرابعة B_4.

استراتيجيات اللاعب (A)	معادلة المستقيم	قيمة Y_1 عندما q_3=0	قيمة Y_2 عندما q_3=1
A_1	$4q_3 - 1$	4(0)-1=-1 (0,-1)	4(1)-1=3 (1,3)
A_2	$6 - 4q_3$	6-4(0)=6 (0,6)	6-4(1)=2 (1,2)



شكل (٦-٤) يوضح منطقة الحل المقبول للاعب (B)

- ✓ ان منطقة تقاطع المستقيمين للاعب (A) شكلت المنطقة العلوية المظلله ذات الزوايا (ABCDE) وهي تُمثل منطقة الحل المقبول للاعب (B) ولأنهُ يبحث عن أقل خساره ممكنة، لهذا نختار أدنى نقطة في تلك المنطقة وهي النقطة B والتي تُمثل نقطة (MiniMax) لهذهِ المباراة، حيثُ يُمثل الأحداثي السيني لنقطة B قيمة $q_4=1-q_3=1-0.875=0.125$ & $q_3=0.875$، أما الأحداثي الصادي فيمثل القيمة المثلى للمباراة $(v^* = 2.5)$.
- ✓ يُمكن الحصول على قيمة المباراة وذلك بتعويض قيمة $q_3=0.875$ في أحد المستقيمات المتقاطعة والتي شكلت نقطة (MiniMax) كما مبين أدناه:

$$v^* = \begin{Bmatrix} \text{من معادلة الاستراتيجية } A_1 \leftarrow 4q_3 - 1 = 4(0.875) - 1 = 2.5 \\ \text{من معادلة الاستراتيجية } A_2 \leftarrow 6 - 4q_3 = 6 - 4(0.875) = 2.5 \end{Bmatrix}$$

وبذلك نستنتج أن اللاعب (B) يُفضل استخدام الاستراتيجية B_3 و B_4 باحتمال 0.875 و 0.125 على التوالي وثبات احتمال $q_2=0$ للاستراتيجية B_2 المهملة، للحصول على القيمة المثلى للمباراة (أدنى خسارة ممكنة) مساوي إلى $(v^* = 2.5)$.

هناك حل بديل ثاني عندما يلعب (B) الاستراتيجيات B_2 و B_4 مع أهمال B_3، ويترك للطالب إيجاد القيمة المثلى للمباراة بنفس الأسلوب السابق. $q_2 + q_4 = 1 \rightarrow q_4 = 1 - q_2$ where $q_3 = 0$.

٦-٨ مسائل محلولة

سؤال (٦-١)

افترض لدينا مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A)، هل بالامكان تطبيق مبدأ السيطرة؟ ثم أوجد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	4
A_2	1	0	5
A_3	0	1	-1

الحل:

١. نقوم أولاً باختبار وجود نقطة ارتكاز ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كل لاعب.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	2	4	(1) ← MaxiMin
A_2	1	0	5	0
A_3	0	1	-1	-1
Column Maximum	(1)	2	5	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه هناك نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة هي:

- MiniMax value = MaxiMin value ➔ The game value $(v^*) = 1$
- The saddle point in (A_1) & (B_1), that's mean in $(1,1)$.

٢. رغم أننا قد حصلنا على قيمة المباراة وهذا ينهي المسألة، لكن يمكن تطبيق مبدأ السيطرة لتقليص حجم مصفوفة الدفع واثبات صحة حصولنا على قيمة المباراة الفعلية:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A):
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_2 لا ينفع حذف أي منهما.
  - ✓ نقارن الصفوف A_1A_3 نُلاحظ أنه جميع قيم صف A_3 أقل من جميع عناصر صف A_1 المناظرة لها، لهذا نحذف صف A_3 لأنه مسيطر عليه من قبل عناصر صف A_1، وأصبحت مصفوفة الدفع تتضمن صفين هما A_1 و A_2 فقط.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	4
A_2	1	0	5

- نبدأ بأعمدة اللاعب (B):
  - ✓ نقارن الأعمدة B_1B_2 لا ينفع حذف أحدهما.
  - ✓ نقارن الأعمدة B_1B_3 نُلاحظ أن جميع عناصر عمود B_3 أكبر من العناصر التي تناظرها في عمود B_1 لهذا يتم حذف العمود ذو العناصر الأكبر وهو B_3، وأصبحت مصفوفة الدفع تتضمن عمودين فقط هما B_1 و B_2.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	1	0

✓ نقارن مرة ثانية الصفوف A_1A_2 نُلاحظ أنه جميع قيم صف A_2 أقل أو مساوية لعناصر صف A_1 المناظرة لها، لهذا نحذف صف A_2 لأنه مسيطر عليه من قبل A_1، وأصبحت مصفوفة الدفع بالشكل:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_1	1	2

✓ نقارن مرة ثانية الأعمدة B_1B_2 نُلاحظ أن عنصر عمود B_2 أكبر من العنصر في عمود B_1 لهذا يتم حذف عمود B_2، وأصبحت مصفوفة الدفع تتضمن فقط صف A_1 وعمود B_1.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy
	B_1
A_1	(1) ← MaxiMin

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أننا قد حصلنا على نفس نقطة الارتكاز ونفس قيمة المباراة:

- MiniMax value = MaxiMin value ➔ The game value $(v^*) = 1$
- The saddle point in (A_1) & (B_1), that's mean in (1,1).

سؤال (٦-٢)

افترض لدينا مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A)، هل بالأمكان تطبيق مبدأ السيطرة ومعدل الاستراتيجيات؟ ثم أوجد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	−3	1	2
A_2	−1	2	1
A_3	1	1	−2

الحل:

١. نقوم أولاً باختبار وجود نقطة ارتكاز ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كل لاعب.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	
A_1	−3	1	2	−3
A_2	−1	2	1	(−1) ← MaxiMin
A_3	1	1	−2	−2
Column Maximum	(1)	2	2	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- MiniMax value ≠ MaxiMin value
- $MaxiMin = -1 \leq v \leq MiniMax = 1$

٢. نطبق مبدأ السيطرة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A):

✓ نقارن الصفوف A_1A_2 و A_1A_3 و A_2A_3 نُلاحظ أنهُ لا ينفع حذف أياً منها.

- نبدأ بأعمدة اللاعب (B):

✓ نقارن الأعمدة B_1B_2 نُلاحظ أن جميع عناصر عمود B_2 أكبر من العناصر التي تناظرها في عمود B_1 لهذا يتم حذف العمود ذو العناصر الأكبر وهو B_2.

✓ نقارن الأعمدة B_1B_3 لا ينفع حذف أحدهما، وأصبحت مصفوفة الدفع تتضمن عمودين فقط هما B_1 و B_3.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_3
A_1	−3	2
A_2	−1	1
A_3	1	−2

3. من أعلاه نُلاحظ أنه لا ينفع تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة لتقليص حجم مصفوفة الدفع، لهذا نحاول تطبيق مبدأ معدل الاستراتيجيات:

✓ نأخذ معدل أول استراتيجيتين وهما A_1 و A_2 ونقارنها مع الاستراتيجية الثالثة A_3، حيثُ نُلاحظ أنهُ لا ينفع حذف أي منهما.

$\frac{A_1 + A_2}{2}$	$\frac{-3 + (-1)}{2} = -2$	$\frac{2 + 1}{2} = 1.5$
A_3	1	−2

✓ نأخذ معدل الاستراتيجيتين A_1 و A_3 ونقارنها مع الاستراتيجية A_2:

$\frac{A_1 + A_3}{2}$	$\frac{-3+1}{2} = -1$	$\frac{2+(-2)}{2} = 0$
A_2	-1	1

بما أن جميع قيم صف A_2 مسيطرة على صف المعدل، لهذا يتم حذف الاستراتيجيتين A_1 و A_3 لأنه مسيطر عليهما من قبل A_2، وتصبح مصفوفة الدفع بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_3
A_2	-1	1

✓ نقارن الأعمدة B_1B_3 نُلاحظ أن عنصر عمود B_3 أكبر من العنصر في عمود B_1 لهذا يتم حذف العمود ذو العناصر الأكبر وهو B_3، وأصبحت مصفوفة الدفع تتضمن فقط صف واحد A_2 وعمود واحد B_1:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy
	B_1
A_2	-1 ← MaxiMin
	↑ MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أننا قد حصلنا على نفس نقطة الارتكاز ونفس قيمة المباراة:

- MiniMax value = MaxiMin value ➔ The game value $(v^*) = -1$
- The saddle point in (A_2) & (B_1), that's mean in $(2,1)$.

سؤال (٦-٣)

بسبب انتشار فيروس العوز المناعي البشري (الأيدز)، قامت منظمة الصحة العالمية بتكثيف جهودها لإيجاد لقاح فعال لسلالتين من هذا الفيروس هما B_1 و B_2، حيثُ تم التوصل إلى لقاحين هما A_1 و A_2 بتأثير مختلف على كلا السلالتين. إن اللقاح A_1 فعال بنسبة 80% للوقاية من السلالة الأولى B_1 وبنسبة 65% للوقاية من السلاله الثانية B_2، أما اللقاح الثاني A_2 فهو فعال بنسبة 55% للوقاية من السلالة الأولى B_1 وبنسبة 85% للوقاية من السلالة الثانية B_2.

المطلوب: استخدم الطريقة الحسابية لإيجاد السياسة المثلى التي يجب أن تتبعها منظمة الصحة العالمية لتلقيح جميع المصابين بهذا الفيروس.

الحل:

في هذهِ المباراة تسعى منظمة الصحة العالمية (اللاعب الأول (A)) إلى تحقيق أفضل ربح (أعلى نسبة شفاء للمواطنين المصابين بالفيروس)، بينما يرغب فيروس العوز المناعي (اللاعب الثاني (B)) أن يصيب أكبر عدد من المواطنين من خلال تقليل نسبة أرباح تلك المنظمة. لهذا يُمكن صياغة مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A) بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_1	0.80	0.65
A_2	0.55	0.85

١. نقوم أولاً باختبار وجود نقطة ارتكاز ومن ثم نحدد الاستراتيجيات التي سيلعب بها كل لاعب.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	B_1	B_2	
A_1	0.80	0.65	(0.65) ← MaxiMin
A_2	0.55	0.85	0.55
Column Maximum	(0.80)	0.85	

MiniMax

من مصفوفة الدفع أعلاه نُلاحظ أنه لا توجد نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة وقيمة المباراة تكون على شكل فترة هي:

- MiniMax value ≠ MaxiMin value
- $MaxiMin = 0.65 \leq v \leq MiniMax = 0.80$

٢. ايجاد ملاحق اللاعب (A) و (B):

ملاحق (A) للصفوف	ملاحق (B) للأعمدة
$\|0.80 - 0.65\| = 0.15$	$\|0.80 - 0.55\| = 0.25$
$\|0.55 - 0.85\| = 0.30$	$\|0.65 - 0.85\| = 0.20$

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		ملاحق (A)
	B_1	B_2	
A_1	0.80	0.65	0.30
A_2	0.55	0.85	0.15
ملاحق (B)	0.20	0.25	0.45

٣. ايجاد القيمة الاحتمالية لكل استراتيجية وذلك بتقسيم الملاحق لكل لاعب على مجموع تلك الملاحق:

- القيم الاحتمالية لملاحق (A): $\frac{0.30}{0.45} = 0.67,\ \frac{0.15}{0.45} = 0.33$
- القيم الاحتمالية لملاحق (B): $\frac{0.20}{0.45} = 0.44,\ \frac{0.25}{0.45} = 0.56$

٤. الاستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين هي:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ 0.67 & 0.33 & 0.44 & 0.56 \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن منظمة الصحة العالمية (اللاعب (A)) ستستخدم اللقاح الأول A_1 باحتمال (0.67) من الوقت وتعتمد على اللقاح الثاني A_2 باحتمال (0.33) من الوقت المتبقي، أما فيروس العوز المناعي (اللاعب (B)) فيستخدم السلالة الأولى B_1 باحتمال (0.44) من الوقت ويعتمد على السلالة الثانية B_2 باحتمال (0.56) من الوقت المتبقي لإصابة أكبر عدد ممكن من المواطنين.

٥. باستخدام ملاحق (A):

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (B_1) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{للصف الأول } A \text{ قيمة الملحق} + a_{21} \times \text{للصف الثاني } A \text{ قيمة الملحق}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0.80 \times 0.30 + 0.55 \times 0.15}{0.45} = 0.72$$

نلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة ($0.80 \leq 0.72 \leq 0.65$).

- عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية (B_2) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{12} \times \text{للصف الأول } A \text{ قيمة الملحق} + a_{22} \times \text{للصف الثاني } A \text{ قيمة الملحق}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0.65 \times 0.30 + 0.85 \times 0.15}{0.45} = 0.72$$

٦. باستخدام ملاحق (B):

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (A_1) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الأول} + a_{12} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0.80 \times 0.20 + 0.65 \times 0.25}{0.45} = 0.72$$

- عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية (A_2) فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{21} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الأول} + a_{22} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0.55 \times 0.20 + 0.65 \times 0.25}{0.45} = 0.72$$

حيثُ نُلاحظ أنه يجب أن تكون جميع قيم المباراة التي تم الحصول عليها من استخدام جميع الملاحق متساوية وهي ($v^* = 0.72$)، وهذا يعني أنهُ على الأقل 72% من المواطنين يحصلون على مناعه للوقاية من هذا الفيروس بغض النظر عن نوع السلالة التي سببت هذا المرض، ومن جهة أخرى فإن قيمة المباراة تعني أيضاً أن الفيروس يسعى لجعل مناعة المواطنين لا تتجاوز حدها الأعلى 72% نتيجة الإصابة بكلا نوعي السلالتين بغض النظر عن استراتيجية التلقيح التي ستعتمدها منظمة الصحة العالمية.

سؤال (٦-٤)

أفترض لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A):

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	−3	0	−2	−2
A_2	2	3	2	3	−1
A_3	0	4	−1	3	3
A_4	−4	0	−2	2	−1

المطلوب: استخدم الطريقة الجبرية لإيجاد القيمة المثلى للمباراة والوقت المطلوب لاستخدام كل استراتيجية.

الحل:

١. نبحث عن نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy					Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	−3	0	−2	−2	−3
A_2	2	3	2	3	−1	(−1) ← MaxiMin
A_3	0	4	−1	3	3	−1
A_4	−4	0	−2	2	−1	−4
Column Maximum	(2)	4	2	3	3	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة ضمن الفترة:

$$MaxiMin = -1 \leq v \leq MiniMax = 2$$

٢. لاستخدام الطريقة الجبرية يجب أن يكون حجم المباراة (2×2) لهذا نحاول تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة:

- نبدأ بصفوف اللاعب (A):

✓ نقارن الصفوف A_1A_2 نُلاحظ أن جميع قيم صف A_1 أصغر من قيم A_2 لهذا يحذف صف A_1 لأنه مسيطر عليه من قبل A_2.

✓ نقارن الصفوف A_2A_3 لا ينفع حذف أي منهما.

✓ نقارن الصفوف A_2A_4 نُلاحظ أن جميع قيم صف A_4 أصغر من قيم A_2 لهذا يحذف صف A_4 لأنه مسيطر عليه من قبل A_2، وأصبحت المصفوفة بالشكل الآتي:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	2	3	2	3	−1
A_3	0	4	−1	3	3

• نقارن أعمدة اللاعب (B):

✓ نقارن B_1B_2 نُلاحظ أن جميع قيم عمود B_2 أكبر من قيم عمود B_1 لهذا يحذف عمود B_2 لأنه مسيطر عليه من قبل B_1.

✓ نقارن B_1B_3 نُلاحظ أن جميع قيم عمود B_1 أكبر من قيم عمود B_3 لهذا يحذف عمود B_1 لأنه مسيطر عليه من قبل B_3.

✓ نقارن B_3B_4 نُلاحظ أن جميع قيم عمود B_4 أكبر من قيم عمود B_3 لهذا يحذف عمود B_4 لأنه مسيطر عليه من قبل B_3، وأصبحت المصفوفة بالحجم النهائي (2×2) التالي حيث ليس هناك أي أمكانية للتقليص.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	B_3	B_5	
A_2	2	−1	(−1) ← MaxiMin
A_3	−1	3	−1
Column Maximum	(2)	3	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة $(-1 \leq v \leq 2)$.

٣. نطبق الطريقة الجبرية:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_3	B_5
A_2	2	−1
A_3	−1	3
	q_3	q_5

p_2

p_3

- أرباح اللاعب (A):

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_3):

$$2p_2 - (1 - p_2) = 2p_2 - 1 + p_2 = 3p_2 - 1 \quad \dots(1)$$

عندما يلعب (B) الاستراتيجية (B_5):

$$-p_2 + 3(1 - p_2) = -p_2 + 3 - 3p_2 = 3 - 4p_2 \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$3p_2 - 1 = 3 - 4p_2 \;\rightarrow\; 3p_2 + 4p_2 = 4 \;\rightarrow\; p_2 = \frac{4}{7}$$

$$\therefore p_3 = (1 - p_2) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية A_2 بـ$(\frac{4}{7})$ من وقت المباراة ويلعب الاستراتيجية A_3 بـ$(\frac{3}{7})$ من الوقت المتبقي للمباراة، بحيث يحقق الأرباح نفسها بغض النظر عن الاستراتيجية المختارة من قبل اللاعب (B).

✓ نعوض قيمة p_2 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 3p_2 - 1 = 3\left(\frac{4}{7}\right) - 1 = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$-1 \leq 0.71 \leq 2$$

✓ أو نعوض قيمة p_2 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 3 - 4p_2 = 3 - 4\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$-1 \leq 0.71 \leq 2$$

- خسائر اللاعب (B):

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_2):

$$2q_3 - (1 - q_3) = 2q_3 - 1 + q_3 = 3q_3 - 1 \quad \dots(1)$$

عندما يلعب (A) الاستراتيجية (A_3):

$$-q_3 + 3(1 - q_3) = -q_3 + 3 - 3q_3 = 3 - 4q_3 \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$3q_3 - 1 = 3 - 4q_3 \rightarrow 3q_3 + 4q_3 = 3 + 1 \rightarrow q_3 = \frac{4}{7}$$

$$\therefore q_5 = (1 - q_3) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

✓ نعوض قيمة q_3 في المعادلة (1) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 3q_3 - 1 = 3\left(\frac{4}{7}\right) - 1 = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$-1 \leq 0.71 \leq 2$$

✓ أو نعوض قيمة q_3 في المعادلة (2) لإيجاد قيمة المباراة:

$$v^* = 3 - 4q_3 = 3 - 4\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$-1 \leq 0.71 \leq 2$$

- يمكن تلخيص مقدار الأوقات التي سيتم استخدامها من قبل كل لاعب بالمصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_2 & A_3 & B_3 & B_5 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \quad and \quad v^* = 0.71$$

سؤال (٦-٥)

افترض لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A) ذات الحجم (2×3):

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_1	5	6
A_2	6	−5
A_3	4	7

المطلوب: استخدم طريقة الرسم لإيجاد القيمة المثلى للمباراة، ومن ثم أعتمد على الطريقة الحسابية لتأكيد صحة قيمة المباراة.

الحل:

١. نبحث عن نقطة ارتكاز لهذهِ المسألة:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		Row Minimum
	B_1	B_2	
A_1	5	6	(5) ← MaxiMin
A_2	6	−5	−5
A_3	4	7	4
Column Maximum	(6)	7	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وأن قيمة المباراة كانت ضمن الفترة:

$$MaxiMin = 5 \leq v \leq MiniMax = 6$$

٢. نحاول تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة لتقليص حجم المباراة، ولكن ذلك لا ينفع مع جميع الصفوف والأعمدة (يُمكن للطالب تجربة ذلك).

٣. تطبيق قواعد طريقة الرسم البياني:

- نُخصص الرموز الاحتمالية p_1 و p_2 و p_3 للاعب (A) كونه يملك ثلاث استراتيجيات حيثُ $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ، أما اللاعب (B) فيخصص لهُ q_1 و q_2 لامتلاكهِ استراتيجيتين حيثُ $q_1 + q_2 = 1$، علماً أن نتيجة المباراة سيتم حسابها للاعب (B) لامتلاكهِ استراتيجيتين فقط.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy	
	B_1	B_2
A_1	5	6
A_2	6	−5
A_3	4	7
	q_1	q_2

p_1
p_2
p_3

- يُحاول اللاعب (B) تقليل خسائرهِ من خلال جعل قيمة (v) أصغر ما يُمكن فيما إذا طبق اللاعب (A) مختلف استراتيجياتهِ الحرة كالآتي:

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) في حالة استخدام (A) لاستراتيجيته A_1:

$$5q_1 + 6q_2 \le v \rightarrow 5q_1 + 6(1 - q_1) \le v \rightarrow 6 - q_1 \le v \quad \dots(1)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) في حالة استخدام (A) لاستراتيجيته A_2:

$$6q_1 - 5q_2 \le v \rightarrow 6q_1 - 5(1 - q_1) \le v \rightarrow 11q_1 - 5 \le v \quad \dots(2)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(B) في حالة استخدام (A) لاستراتيجيته A_3:

$$4q_1 + 7q_2 \le v \rightarrow 4q_1 + 7(1 - q_1) \le v \rightarrow 7 - 3q_1 \le v \quad \dots(3)$$

يُمكن إدراج المتباينات الثلاث أعلاه والتي تُمثل القيم المتوقعة للاعب (B) بالجدول الآتي:

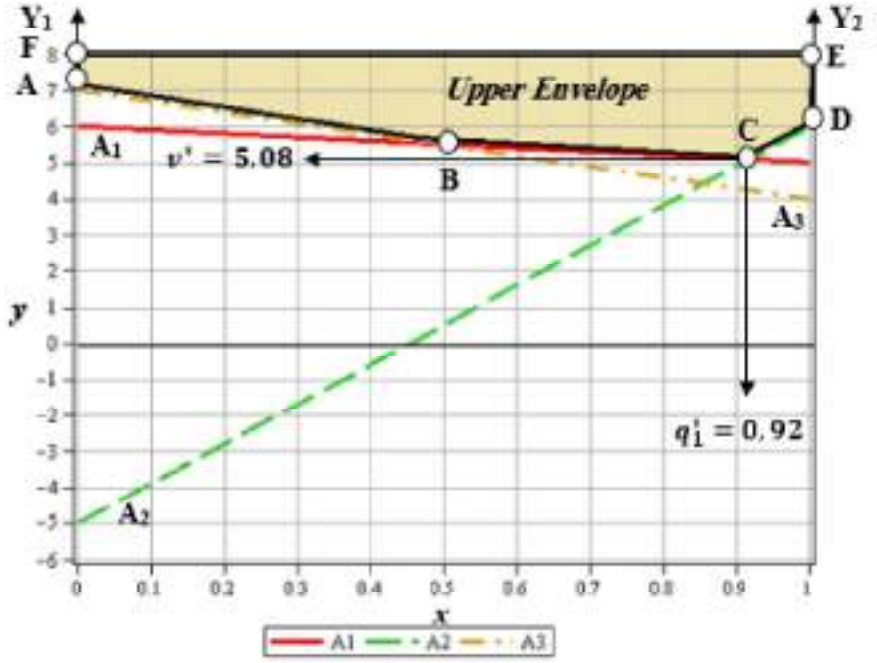
الاستراتيجيات الحرة للاعب (A)	القيمة المتوقعة للاعب (B)
A_1	$6 - q_1$
A_2	$11q_1 - 5$
A_3	$7 - 3q_1$

ان اللاعب (B) يتوقع وفق مبدأ (MiniMax) أنهُ سيحصل على أعلى الخسائر (Maximum) وبالتالي يحاول اختيار أفضل (أقل Minimum) خسارة من بين هذهِ الخسائر العالية.

يتم تحديد القيمة المثلى للمباراة وذلك برسم المستقيمات الثلاث الموضحة بالجدول أعلاه كما في شكل (٦-٥) التالي:

- ✓ نرسم المحور (x) وهو يُمثل احتمال اختيار الاستراتيجية ($0 \le q_1 \le 1$).
- ✓ نرسم محورين لـ(Y) الأول عند النقطة ($q_1=0$) وهو يُمثل الاستراتيجية الأولى (B_1) والعمود الثاني عند النقطة ($q_1=1$) وهو يُمثل الاستراتيجية الثانية (B_2).
- ✓ ملاحظة: الاسلوب المتبع أدناه في استخراج نقاط الخطوط المستقيمة قد يختلف عن اسلوب مثال (٦-١١) وكلاهما صحيح ويُمكن للطالب اتباع ما يراه بسيط بالنسبة له.
- ✓ نرسم المستقيم الذي يُمثل الاستراتيجية A_1 عندما يلعب (B) الاستراتيجيتين التي يملكها، حيثُ نأخذ القيمة في صف A_1 تحت عمود B_1 وهي $a_{11}=5$ ونضعها على محور Y_2، ثم نأخذ القيمة الثانية في صف A_1 تحت عمود B_2 وهي $a_{12}=6$ ونضعها على محور Y_1، ونصل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لتمثل لنا مستقيم الاستراتيجية A_1.

- ✓ نعتمد الاسلوب نفسهِ مع صف A_2 فنضع القيمة $a_{21}=6$ على محور Y_2، ونضع القيمة $a_{22}=-5$ على محور Y_1.
- ✓ نفس الاسلوب مع صف A_3 حيثُ نضع القيمة $a_{31}=4$ على محور Y_2، ونضع القيمة $a_{32}=7$ على محور Y_1.



شكل (٦-٥) يوضح منطقة الحل المقبول للاعب (B)

- ✓ ان منطقة تقاطع المستقيمات الثلاثة للاعب (A) شكلت المنطقة المظللة ذات الزوايا (ABCDEF) وهي تُمثل منطقة الحل المقبول للاعب (B) ولأنهُ يبحث عن أقل خساره ممكنة، لهذا نختار أدنى نقطة في تلك المنطقة وهي النقطة C والتي تُمثل نقطة (MiniMax) لهذهِ المباراة، حيثُ يُمثل

الأحداثي السيني لنقطة C قيمة $q_2=1-q_1=0.08$ & $q_1=0.92$ ، أما الأحداثي الصادي فيمثل القيمة المثلى للمباراة ($v^* = 5.08$).

- ✓ ان القيمة المثلى للمباراة جاءت من تقاطع المستقيمين A_1 و A_2 عند النقطة C، وبمساواة معادلتي المستقيمين نستطيع الحصول على قيمة المباراة:

$$6 - q_1 = 11q_1 - 5 \rightarrow 11q_1 + q_1 = 6 + 5 \rightarrow q_1 = \frac{11}{12} = 0.92$$

$$\therefore q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{12} = 0.08$$

- ✓ يُمكن الحصول على قيمة المباراة وذلك بتعويض قيمة $q_1=0.92$ في أحد المستقيمات المتقاطعة والتي شكلت نقطة C كما مبين أدناه:

$$v^* = \begin{Bmatrix} \text{من معادلة الاستراتيجية } A_1 \leftarrow 6 - q_1 = 6 - 0.92 = 5.08 \\ \text{من معادلة الاستراتيجية } A_2 \leftarrow 11q_1 - 5 = 11(0.92) - 5 = 5.8 \end{Bmatrix}$$

- وحيثُ ان القيمة المثلى تم الحصول عليها من تقاطع المستقيمين A_1 و A_2 لهذا يتم حذف الاستراتيجية A_3 التي ليس لها تأثير على قيمة المباراة، وبهذا يصبح حجم مصفوفة الدفع (2×2) بدل عن (3×2) وبالتالي نستطيع تطبيق الطريقة الحسابية للحصول على قيمة تأكيدية للمباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		(A) ملاحق
	B_1	B_2	
A_1	5	6	11
A_2	6	−5	1
(B) ملاحق	11	1	12

$11/12$ $1/12$

$11/12$ $1/12$

- الاستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين هي:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} & \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية A_1 بأحتمال $\frac{11}{12}$ من الوقت ويعتمد على الاستراتيجية A_2 بأحتمال $\frac{1}{12}$ من الوقت المتبقي، وبنفس الشكل مع اللاعب (B).

- باستخدام ملاحق (A):

✓ عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية B_1 فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{للصف الأول } A \text{ قيمة الملحق} + a_{21} \times \text{للصف الثاني } A \text{ قيمة الملحق}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{5(11) + 6(1)}{12} = \frac{61}{12}$$

$$= 5.08$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(6 \geq 5.08 \geq 5)$.

مُلاحظة (٦-٣): نستطيع التوقف في حل المسألة وقد تم الحصول على قيمة المباراة والقيم الاحتمالية، أو من الممكن الأستمرار للتأكد من الحل كما يلي:

- باستخدام ملاحق (B):

✓ عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية A_1 فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{للعمود الأول } B \text{ قيمة الملحق} + a_{12} \times \text{للعمود الثاني } B \text{ قيمة الملحق}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{5(11)+6(1)}{12} = \frac{61}{12}$$
$$= 5.08$$

سؤال (٦-٦)

افترض لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A) ذات الحجم (2×5):

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	0	−5	5	−1
A_2	−5	−1	8	−4	6

المطلوب: استخدم طريقة الرسم لإيجاد القيمة المثلى للمباراة، ومن ثم أعتمد على الطريقة الحسابية لتأكيد صحة قيمة المباراة.

الحل:

١. نبحث عن نقطة ارتكاز لهذه المسألة:

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy					Row Minimum
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	8	0	−5	5	−1	−5 ← MaxiMin
A_2	−5	−1	8	−4	6	−5
Column Maximum	8	0	8	5	6	

MiniMax

نُلاحظ أنه ليس هناك نقطة ارتكاز محددة وان قيمة المباراة كانت ضمن الفترة:

$$MaxiMin = -5 \leq v \leq MiniMax = 0$$

٢. نحاول تطبيق مبدأ الاستراتيجية المسيطرة لتقليص حجم المباراة، ولكن ذلك لا ينفع من جميع الصفوف والأعمدة (يُمكن للطالب تجربة ذلك).

٣. تطبيق قواعد طريقة الرسم البياني:

- نُخصص الرموز الاحتمالية p_1 و p_2 للاعب (A) كونه يملك استراتيجيتين فقط حيثُ $p_1+p_2=1$ ، أما اللاعب (B) فيخصص لهُ q_1 ، q_2 ، q_3 ، q_4 و q_5 لامتلاكهِ 5 استراتيجيات حيثُ $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1$ ، علماً أن نتيجة المباراة سيتم حسابها للاعب (A) لامتلاكهِ استراتيجيتين فقط.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	8	0	−5	5	−1	p_1
A_2	−5	−1	8	−4	6	p_2
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

- يُحاول اللاعب (A) زيادة أرباحهِ من خلال جعل قيمة (v) أكبر ما يُمكن فيما اذا طبق اللاعب (B) مختلف استراتيجياتهِ الحرة كالآتي:

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_1:

$$8p_1 - 5(1 - p_1) \geq v \rightarrow 13p_1 - 5 \geq v \quad \dots(1)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_2:

$$0p_1 - (1 - p_1) \geq v \rightarrow p_1 - 1 \geq v \quad \dots(2)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_3:

$$-5p_1 + 8(1 - p_1) \geq v \rightarrow 8 - 13p_1 \geq v \quad \dots(3)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_4:

$$5p_1 - 4(1 - p_1) \geq v \rightarrow 9p_1 - 4 \geq v \quad \dots(4)$$

✓ القيمة المتوقعة لـ(A) في حالة استخدام (B) لاستراتيجيته B_5:

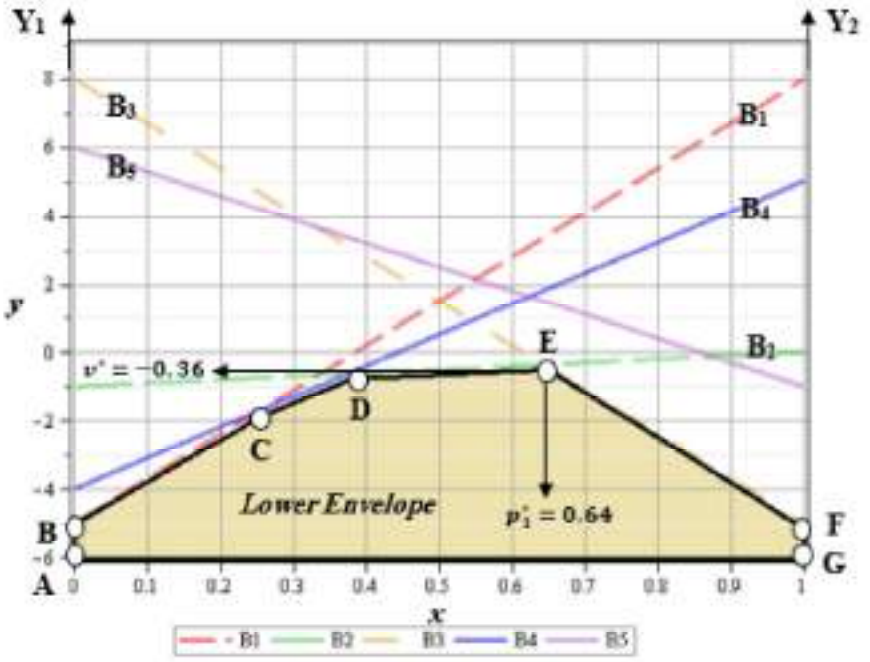
$$-p_1 + 6(1 - p_1) \geq v \rightarrow 6 - 7p_1 \geq v \quad \dots(5)$$

- يتم تحديد القيمة المثلى للمباراة وذلك برسم المستقيمات الخمس أعلاه كما في شكل (٦-٦) التالي:

✓ نرسم المحور (x) وهو يُمثل احتمال اختيار الاستراتيجية ($0 \leq p_1 \leq 1$).

✓ نرسم محورين لـ(Y) الأول عند النقطة ($p_1=0$) وهو يُمثل الاستراتيجية الأولى (A_1) والعمود الثاني عند النقطة ($p_1=1$) وهو يُمثل الاستراتيجية الثانية (A_2).

- ✓ نرسم المستقيم الذي يُمثل الاستراتيجية B_1 عندما يلعب (A) الاستراتيجيتين التي يملكها، حيثُ نأخذ القيمة في صف A_1 تحت عمود B_1 وهي $a_{11}=8$ ونضعها على محور Y_2، ثم نأخذ القيمة الثانية في صف A_2 تحت عمود B_1 وهي $a_{21}=-5$ ونضعها على محور Y_1، ونصل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لتمثل لنا مستقيم الاستراتيجية B_1.
- ✓ نعتمد الاسلوب نفسه مع عمود B_2 فنضع القيمة $a_{12}=0$ على محور Y_2، ونضع القيمة $a_{22}=-1$ على محور Y_1.
- ✓ نفس الاسلوب مع عمود B_3 نضع $a_{13}=-5$ على Y_2، ونضع $a_{23}=8$ على Y_1.
- ✓ نفس الاسلوب مع عمود B_4 نضع $a_{14}=5$ على Y_2، ونضع $a_{24}=-4$ على Y_1.
- ✓ نفس الاسلوب مع عمود B_5 نضع $a_{15}=-1$ على Y_2، ونضع $a_{25}=6$ على Y_1.
- ✓ ان منطقة تقاطع المستقيمات الخمس للاعب (B) شكلت المنطقة المظللة ذات الزوايا (ABCDEFG) وهي تُمثل منطقة الحل المقبول للاعب (A) ولأنهُ يبحث عن أكبر عائد ممكن، لهذا نختار أعلى نقطة في تلك المنطقة وهي النقطة E والتي تُمثل نقطة (MaxiMin) لهذه المباراة، حيثُ يُمثل الاحداثي السيني لنقطة E قيمة $p_1=0.64$ & $p_2=1-p_1=0.36$ ، أما الاحداثي الصادي فيمثل القيمة المثلى للمباراة $(v^* = -0.36)$.



شكل (٦-٦) يوضح منطقة الحل المقبول للاعب (A)

✓ أن القيمة المثلى للمباراة جاءت من تقاطع المستقيمين B_2 و B_3 عند النقطة E، وبمساواة معادلتي المستقيمين نستطيع الحصول على قيمة المباراة:

$$p_1 - 1 = 8 - 13p_1 \rightarrow p_1 + 13p_1 = 8 + 1 \rightarrow p_1 = \frac{9}{14} = 0.64$$

$$\therefore p_2 = 1 - p_1 = \frac{5}{14} = 0.36$$

✓ يُمكن الحصول على قيمة المباراة وذلك بتعويض قيمة p_1=0.64 في أحد المستقيمات المتقاطعة والتي شكلت نقطة E كما مبين أدناه:

$$v^* = \left\{ \begin{array}{c} p_1 - 1 = 0.64 - 1 = -0.36 \leftarrow B_2 \text{ من معادلة الاستراتيجية} \\ 8 - 13p_1 = 8 - 13(0.64) = -0.36 \leftarrow B_3 \text{ من معادلة الاستراتيجية} \end{array} \right\}$$

- وحيثُ أن القيمة المثلى تم الحصول عليها من تقاطع المستقيمين B_2 و B_3 لهذا يتم حذف الاستراتيجية B_1 و B_4 و B_5 التي ليس لها تأثير على قيمة المباراة، وبهذا يصبح حجم مصفوفة الدفع (2×2) بدل عن (5×2) وبالتالي نستطيع تطبيق الطريقة الحسابية للحصول على قيمة تأكيدية للمباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		ملاحق (A)	
	B_2	B_3		
A_1	0	−5	9	$9/14$
A_2	−1	8	5	$5/14$
ملاحق (B)	13	1	14	
	$13/14$	$1/14$		

- الاستراتيجية المختلطة لكلا اللاعبين هي:

$$\begin{pmatrix} (A) & & (B) & \\ A_1 & A_2 & B_2 & B_3 \\ \frac{9}{14} & \frac{5}{14} & \frac{13}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن اللاعب (A) سيلعب الاستراتيجية A_1 بأحتمال $\frac{9}{14}$ من الوقت ويعتمد على الاستراتيجية A_2 بأحتمال $\frac{5}{14}$ من الوقت المتبقي، وبنفس الشكل مع اللاعب (B).

- باستخدام ملاحق (A):

✓ عندما يلعب اللاعب (B) الاستراتيجية B_2 فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{قيمة الملحق } A \text{ للصف الأول} + a_{21} \times \text{قيمة الملحق } A \text{ للصف الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0(9) + (-1)(5)}{14}$$
$$= -0.36$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(0 \leq -0.36 \leq -5)$.

مُلاحظة (٦-٤): نستطيع التوقف في حل المسألة وقد تم الحصول على قيمة المباراة والقيم الاحتمالية، أو من الممكن الاستمرار للتأكد من الحل كما يلي:

- باستخدام ملاحق (B):

✓ عندما يلعب اللاعب (A) الاستراتيجية A_1 فإن قيمة المباراة تحسب بالصيغة:

$$v^* = \frac{a_{11} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الأول} + a_{12} \times \text{قيمة الملحق } B \text{ للعمود الثاني}}{\text{مجموع الملاحق}} = \frac{0(13) + (-5)(1)}{14}$$
$$= -0.36$$

نُلاحظ أن قيمة المباراة تقع ضمن الفترة $(0 \leq -0.36 \leq -5)$.

تمارين الفصل السادس

تمرين (٦-١)

افترض لدينا مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A)، طبق مبدأ السيطرة ومبدأ معدل الاستراتيجيات (حتى في حالة أن هناك نقطة ارتكاز)؟ ثم أوجد قيمة المباراة.

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	-3	-2	-4
A_2	-4	-2	-1	0
A_3	1	-1	2	1

مُلاحظة (٦-٥): المسألة تملك نقطة ارتكاز، لكن هناك امكانية لتقليص الصفوف (مثل A_2) والأعمدة (مثل B_1 و B_3) وفق مبدأ السيطرة، حاول تطبيق هذا المبدأ.

تمرين (٦-٢)

استخدم الطريقة الحسابية لإيجاد القيمة المثلى للمباراة، إذا كان لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A).

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	-3	1	1
A_2	-1	1	-2	2
A_3	-1	2	-1	3

مُلاحظة (٦-٦): المسألة لا تملك نقطة ارتكاز، وهناك امكانية لتقليص الصف (A_2) والأعمدة (B_1 و B_4) وفق مبدأ السيطرة، بهذا تصبح لديك مصفوفة ذات حجم (2×2) عندها يُمكن تطبيق الطريقة الحسابية.

تمرين (٦-٣)

استخدم الطريقة الجبرية لإيجاد القيمة المثلى للمباراة، إذا كان لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A).

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-1	1
A_2	-2	0	3
A_3	3	-1	2

ملاحظة (٦-٧): المسألة لا تملك نقطة ارتكاز، وهناك امكانية لتقليص الصف (A_1) والعمود (B_3) وفق مبدأ السيطرة، بهذا تصبح لديك مصفوفة ذات حجم (2×2) عندها يُمكن تطبيق الطريقة الجبرية.

تمرين (٦-٤)

استخدم طريقة الرسم لإيجاد القيمة المثلى للمباراة، إذا كان لديك مصفوفة الدفع التالية التي تخص اللاعب (A).

The Player's (A) Strategy	The Player's (B) Strategy		
	B_1	B_2	B_3
A_1	4	-4	10
A_2	-2	3	1
A_3	6	-5	7

ملاحظة (٦-٨): المسألة لا تملك نقطة ارتكاز، وهناك امكانية فقط لتقليص العمود (B_3) وفق مبدأ السيطرة، بهذا تصبح لديك مصفوفة ذات حجم (2×3) عندها يُمكن تطبيق طريقة الرسم.

تمرين (٦-٥)

يمتاز السوق التجاري العراقي بشدة المنافسة بين التجار بسبب سياسة الاستيراد التجاري المفتوحة للعديد من البلدان، ولهذا يتنافس اثنان من التجار المهيمنين على توزيع منتجات الألبان، ولنفرض أن التاجر الأول (اللاعب A) يرغب بتسويق أربع منتجات هي (A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4) أما التاجر الثاني المنافس لهُ (اللاعب B) فيسعى لتوزيع ثلاث منتجات هي (B_1 ، B_2 و B_3)، وعليه فإن مصفوفة الدفع الخاصة باللاعب (A) والتي تشكلت جراء هذهِ المنافسة هي كما يلي. طبق مبدأ السيطرة للحصول على قيمة المباراة، وبخلافهِ حاول استخدام الطريقة المناسبة لإيجاد تلك القيمة.

The Player's	The Player's (B) Strategy		
(A) Strategy	B_1	B_2	B_3
A_1	10	−2	4
A_2	−4	2	−6
A_3	8	2	12
A_4	−2	4	4

مُلاحظة (٦-٩): المسألة لا تملك نقطة ارتكاز، لكن هناك امكانية لتقليص الصف (A_2) والعمود (B_3) ثم الصف (A_4) والعمود (B_1) وأخيراً الصف (A_1) وفق مبدأ السيطرة، لتنتهي المسألة بصف وعمود واحد (القيمة المتبقية تُمثل قيمة المباراة)، حاول تطبيق هذا المبدأ.

المصادر العربية

أيوب، نادرة، (١٩٩٧)، "نظرية القرارات الإدارية"، دار زهران.

باري رندر، ورالف ستير، وناجراج بالاكريشان، تعريب: مصطفى مصطفى موسى، تقديم: يحيى عبد العظيم المشد، (٢٠٠٧)، "نمذجة القرارات وبحوث العمليات – باستخدام صفحات الأنتشار الألكترونية (على الحاسب الآلي)"، دار المريخ للنشر، السعودية.

بري، عدنان ماجد عبد الرحمن، (٢٠٠٢)، "طرق التنبؤ الإحصائي- الجزء الأول"، جامعة الملك سعود، متاح على الشبكة الانترنت على الرابط الآتي: http://www.abarry.ws/books/statisticalForecast.pdf، (آخر مشاهدة بتاريخ ٢٠١٤/٤/٣٠).

البلخي، زيد تميم، (١٩٩٨)، "مقدمة في بحوث العمليات"، جامعة الأمام محمد بن سعود الأسلامية.

البلداوي، عبد الحميد عبد المجيد، (٢٠٠٩)، "أساليب الإحصاء للعلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال مع استخدام برنامج SPSS"، الطبعة الأولى، عمان: دار وائل للنشر.

الجاسم، صباح هادي والصراف، زكي جواد، (١٩٨٦)، "نظرية القرارت الإحصائية".

الجمعة، نورا، (٢٠٠٩)، "نظرية صفوف الانتظار"، رسالة ماجستير في إدارة الأعمال – كلية الاقتصاد – جامعة دمشق.

راضي، سهيلة جمعه، هاشم، صفاء محمد، (٢٠٠٩)، "الأساليب الكمية في حساب تأثير تكاليف التشغيل والصيانة على قرار الاستبدال"، مجلة التقني – المجلد الثاني والعشرون / العدد ٥، ص ص ١-١١.

راهي، عبد الرحيم خلف، وابراهيم، سميرة خليل، (٢٠٠٨)، "استخدام أساليب الأمثلية لحل مشكلة النقل (دراسة تطبيقية)"، مجلة العلوم الإقتصادية والأدارية، المجلد ١٤/٥٠، ص ٢٥٦.

السلامي، قصي حميد، (٢٠١٢)، "استخدام أساليب بحوث العمليات لتحسين كفاءة جدولة صفوف الانتظار لزيادة سرعة معالجات الحاسوب"، أطروحة دكتوراه، جامعة أم درمان الإسلامية، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، قسم الإحصاء.

شعراوي، سمير مصطفى، (٢٠٠٥)، "مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية"، الطبعة الأولى، مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية.

شمخي، عدنان، وحسن، ضويه، (١٩٨٨)، "مقدمة في بحوث العمليات"، مطبعة الحكمة، جامعة بغداد.

صابر، جمال عبد العزيز، (٢٠٠٩)، "بحوث العمليات في المحاسبة"، منشورات جامعة القاهرة.

صادق، ثناء رشيد، (٢٠٠١)، "بحوث العمليات – البرمجة الخطية"، منشورات جامعة عمر المختار – البيضاء – ليبيا.

الصفدي، محمد سالم، (١٩٩٩)، "بحوث العمليات – تطبيق وخوارزميات"، دار وائل للطباعة والنشر، عمان–الأردن.

عياش، جابر محمد، (٢٠٠٨)، "واقع استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرار وحل المشكلات لدى المؤسسات الأهلية بقطاع غزة"، رسالة ماجستير، الجامعة الأسلامية – غزة، كلية التجارة – قسم إدارة الأعمال.

الفضل، مؤيد عبد الحسين، (٢٠٠٨)، "بحوث عمليات محاسبية"، الطبعة الأولى، دار إثراء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

الفضل، مؤيد عبد الحسين، (٢٠١٠)، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع, عمان – الأردن.

فريحات، حيدر محمد وعواد، محمد سليمان، (١٩٩٨)، "بحوث العمليات – النظرية والتطبيقات"، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الاردن.

الطائي، فاضل عباس، (٢٠٠٦)، "التنبؤ والتمهيد للسلاسل الزمنية باستخدام التحويلات مع التطبيق"، بحث منشور في وقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات– الإحصاء والمعلوماتية، جامعة الموصل، ٦–٢٠٠٩/١٢/٧.

طعمه، سعدية عبد الكريم، (٢٠١٢)، "استخدام تحليل السلاسل الزمنية للتنبؤ بأعداد المصابين بالأورام الخبيثة في محافظة الانبار"، مجلة جامعة الانبار للعلوم الاقتصادية والإدارية، المجلد ٤، العدد ٨، ص ص ٣٧١–٣٩٣.

طيار، أحسن، (٢٠١٢)، "واقع استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية: دراسة ميدانية بقطب المحروقات في ولاية سكيكدة بالجزائر"، المجلة الأردنية في إدارة الأعمال، المجلد ٨، العدد ١، ص ص ١٤٨–١٦٧.

النائب، إبراهيم، وباقية، أنعام، (١٩٩٠)، "بحوث العمليات – خوارزميات وبرامج حاسوبية"، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن.

النجار، ظافر حسين والنجار، صباح مجيد وشاهر، ثائر فيصل، (٢٠٠٦)، "الأساليب الكمية للإدارة"، بدون دار نشر.

نجم، نجم عبود، (٢٠٠٧)، "مدخل إلى إدارة العمليات"، عمان: دار المناهج للنشر والتوزيع، بتصرف.

المصادر الاجنبية

A. Ravi Ravindran, (2009), "Operations Research: Applications", CRC Press, Taylor & Francis Group, USA.

Dalal S. Al-Jawad, (2013), "Operations Research", Cihan University Publications, Erbil – IRAQ.

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, (2001), "Operations Research", 7th Edition, McGraw-Hill Companies, USA.

Gebhard Kirchgassner & Jürgen Wolters, (2007), "Introduction to Modern Time Series Analysis", Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Gerd Finke, (2008), "Operations research and networks", ISTE Ltd., UK.

Hamdy A. Taha, (2007), "Operations Research: An Introduction", 8th Edition , Pearson Prentice Hall.

Harry Perros, (2007), "Queuing Theory – A primer", Service Management, http://www.pdfdrive.net/queueing-theory-a-primer-nc-state-www4-server-e2671698.html.

Hayes, David C., (January 1977), "The Contingency Theory of Managerial Accounting", The Accounting Review.

Kaplan, R. S., (July 1984), "The Evaluation of Management Accounting", the Accounting Review.

Merrill Lynch, (2014), "Financial Advisor", Bank of America Corporation, http:// www.Wealthmanagement.ml.com/WM/Pages/Home.aspx.

Otley, David T., (1980), "The Contingency Theory of Management Accounting: Achievement and sPrognosis", Accounting Organization and Society, Vol. (5), No.4.

Pinedo, Michael L., (2005), 'Planning and Scheduling in Manufacturing and Services', Springer Science+Business Media, Inc., USA.

Rama Murthy P., (2007), Operations Research, 2nd ed., New Age International (P) Ltd., Publishers, ISBN (13) : 978-81-224-2944-2.

Ruhul A. Sarker & Charles S. Newton, (2008), 'Optimization Modeling – A Practical Approach', CRC Press – Taylor & Francis Group, USA.

Scapens, R. W., (May 1982), 'Management Accounting – A survey Paper', Published paper commissioned by SSRC.

Sorter, George, H. & Martins, G., (1974), 'Opportunities and Implications of Report on the Objective of Financial Statements', Studies on financial Accounting, Journal of Accounting Research.

Tommi Sottinen, (2009), 'Operations Research: with GNU Linear Programming Kit', Web Notes, http://www.uwasa.fi/~tsottine/orms1020.

Winston Wayne L., (2004), 'Operations Research: Application and Algorithms', Thomson Learning, USA.



د. سيف الدين هاشم قمر Dr. Saifaldin Hashim Kamar

- مواليد 1970- القادسية/ العراق.
- حاصل على بكالوريوس علوم في الاحصاء عام (1993)، وحاصل على ماجستير علوم في الاحصاء عام (1998) من جامعة بغداد/ العراق، وحاصل على دبلوم عالي في الحاسبات عام (1999) من معهد الدراسات العليا للحاسوب والمعلوماتية/ العراق، وحاصل على شهادة الدكتوراه في الاحصاء عام (2010) من جامعة أم درمان الإسلامية/ السودان.
- حاصل على لقب (استاذ مساعد) عام (2015).
- أنجز ما يقارب (20) بحثاً علمياً منشوراً، وترجم كتاب بعنوان "لغة R للمبتدئين"، كما ألف كتاباً مشتركاً بعنوان "الأساليب الكمية للعلوم المالية والمصرفية"، وشارك في العديد من المؤتمرات العلمية المحلية والدولية.
- تولى التدريس في العديد من الجامعات والمعاهد العراقية والليبية، منها في العراق: كلية الادارة والاقتصاد/ الجامعة المستنصرية والكلية التقنية عام (1999-2000)، وفي ليبيا: جامعة المرج للأعوام (2000-2003)، وجامعة عمر المختار للعام (2002-2003)، وجامعة بنغازي (قاريونس سابقاً) للأعوام (2003-2009)، وتدريسي على ملاك كلية الادارة والاقتصاد/ الجامعة العراقية منذ عام (2012).
- شغل العديد من المناصب الإدارية منها: رئيس قسم الإحصاء في جامعة بنغازي (قاريونس سابقاً)/ كلية الآداب والعلوم المرج للمدة (2008-2009). ومديراً لقسم الدراسات والتخطيط والمتابعة في رئاسة الجامعة العراقية لمدة (2013-2015) ومعاون العميد للشؤون العلمية في كلية الإدارة والاقتصاد/ الجامعة العراقية للمدة (2015-2016).
- عضو هيئة تحرير مجلة الجامعة العراقية للأعوام (2015-2017).
- عضواً أو رئيساً لأكثر من (60) لجنة على مستوى التعليم العالي في العراق وليبيا.
- عضو الجمعية العراقية للعلوم الاحصائية منذ عام (1996)، وعضو نقابة المعلمين العراقيين منذ (2011)، وعضو رابطة التدريسيين الجامعيين العراقية منذ عام (2012)، وعضو اتحاد الاحصائيين العرب منذ عام (2013).



د. قصي حميد السلامي Dr. Qusay Hameed Al-Salami

- مواليد 1972 – بغداد/ العراق.
- حاصل على بكالوريوس علوم في الاحصاء والحاسبات عام (1994) من كلية الرافدين الجامعة/ العراق، وحاصل على ماجستير علوم في بحوث العمليات عام (1998) من جامعة بغداد/ العراق، وحاصل على شهادة الدكتوراه في الاحصاء عام (2013) من جامعة أم درمان الإسلامية/ السودان.
- حاصل على لقب (مدرس) عام (2013).
- أنجز ما يقارب (18) بحثاً علمياً منشوراً، وألف كتاباً مشتركاً بعنوان "الأساليب الكمية للعلوم المالية والمصرفية"، وشارك في العديد من المؤتمرات العلمية المحلية والدولية.
- تولى التدريس في العديد من الجامعات والمعاهد العراقية والليبية، منها في العراق: كلية بغداد للعلوم الاقتصادية الجامعة عام (2011–2012)، كلية الكتاب الجامعة/ كركوك عام (2016–2017)، وفي ليبيا: جامعة بنغازي (قاريونس سابقاً)/ كلية العلوم للأعوام (1998–2007) – كلية تقنية المعلومات للأعوام (2007–2011) – كلية الأقتصاد للأعوام (2007–2011) – كلية المعلمين/ الكفرة للأعوام (2005–2007) – كلية الآداب والعلوم/ إجدابيا للأعوام (2006–2010) – كلية الآداب والعلوم/ الإبيار للأعوام (2008–2010)، وجامعة المرج للأعوام (2003–2005)، مركز الشهيد الدرة العالي والمتوسط لتقنيات الحاسوب/ بنغازي للأعوام (1998–2006)، وتدريسي على ملاك كلية العلوم المالية والمصرفية – قسم ادارة الأعمال/ جامعة جيهان – أربيل/ العراق منذ عام (2013).
- شغل منصب مدير ضمان الجودة في قسم أدارة الأعمال/ جامعة جيهان للأعوام (2014–2018).
- عضو هيئة تقييم البحوث في مجلة The Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal (ASTESJ) عام (2016–2017).
- عضواً أو رئيساً لأكثر من (15) لجنة في الجامعات والكليات والمعاهد التي عمل بها سواء في العراق أو ليبيا.
- عضو جمعية الإقتصاديين العراقية منذ عام (1995)، عضو جمعية الحاسبات العراقية منذ عام (1996)، عضو الجمعية العراقية للعلوم الاحصائية منذ عام (1997)، وعضو جمعية بحوث العمليات العراقية منذ عام (1998).